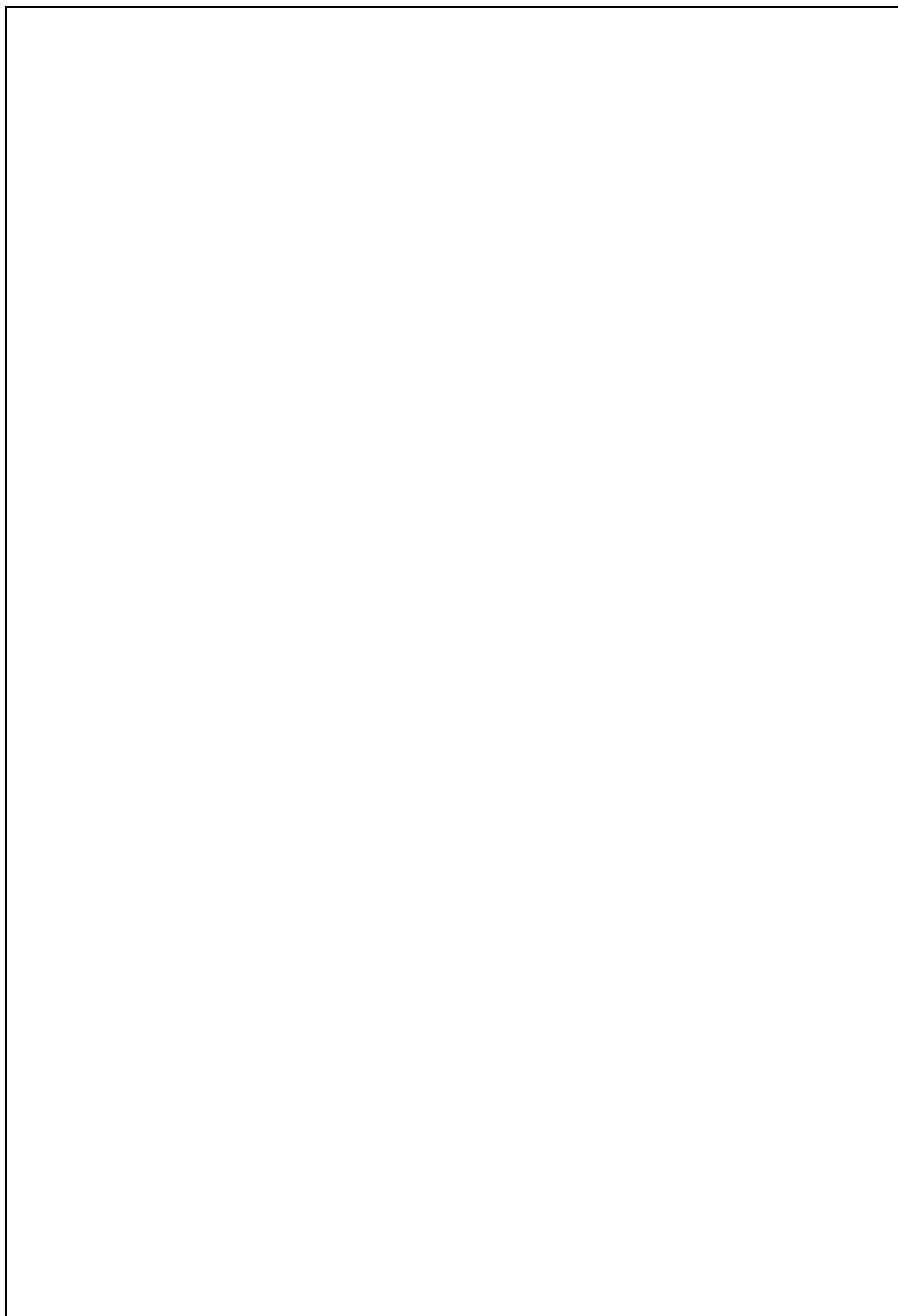








CEPUNT

CENTRO PREUNIVERSITARIO DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE TRUJILLO

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO



RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

© Centro de Estudios Preuniversitarios de la UNT

Prohibida la reproducción total o parcial de la información gráfica o literaria sin autorización de los editores.

AUTORES:

César Herrera Asmat

Juan Alberto Huerta Flores

Jorge Edilberto Reyes Rodríguez

Jorge Arnaldo Saavedra León

Sonia Rentería Alva

Ronald Iparraguirre Contreras

José Luis Salazar la Torre

Jorge Manuel Yáñez Díaz

ACTUALIZACIÓN Y CORRECCIÓN

Juan Alberto Huerta Flores (Coordinador del curso)

Jorge Edilberto Reyes Rodríguez

Jorge Arnaldo Saavedra León

Alfredo Ulloa Meléndez

Jorge Manuel Yáñez Díaz

COMITÉ DIRECTIVO:

Directora: Dra. Edith Loreley Vásquez Correa

Subdirector Académico: Mg. Elmer González López

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:

Jhonatan Rodolfo Rodríguez Blas

DISTRIBUCIÓN INTERNA

Av. América Oeste s/n Ciudad Universitaria

Telefax 044 - 287221

Trujillo – Perú

2018



ÍNDICE

PRIMER EXAMEN SUMATIVO

OPERACIONES FUNDAMENTALES13

La importancia del orden

Operación convencional. El sistema de los números reales. Generatriz de un decimal. Potenciación, radicación y logaritmación. Propiedades de la potenciación. Propiedades de la radicación. Logaritmación. Operación combinada.

HABILIDAD OPERATIVA39

Estrategia Operativa Alternativa

Razonamiento inductivo. Razonamiento deductivo. Cifras terminales.

OPERACIONES NO CONVENCIONALES59

Nuevas Operaciones

Concepto. Clasificación por el número de componentes. Clasificación por su estructura. Operación binaria: Propiedades y elementos notables.

SUCESIONES81

Orden en los números

Sucesión. Progresión aritmética. Progresión geométrica. Sucesiones polinominales.

SERIES99

Sumas históricas

Serie. Serie Aritmética. Serie Geométrica. Serie polinomial. Sumatoria. Series notables.

**SEGUNDO EXAMEN SUMATIVO****TÉCNICAS DE CONTEO Y TOPOLOGÍA117**

Estrategias para contar y su vínculo con la geometría

Conteo por simple inspección. Método combinatorio. Conteo de segmentos. Conteo de triángulos. Conteo de ángulos convexos. Conteo de cuadriláteros. Conteo de cuadrados. Conteo de paralelepípedos. Conteo de puntos de intersección de figuras geométricas. Gráfica. Valencia. Trazo continuo. Recorrido Euleriano. Trazos dobles. Teorema del recorrido mínimo.

ANÁLISIS COMBINATORIO157

Mil años pagando

Factorial de un número. Cofactorial o semifactorial. Definición complementario de cofactorial. Número combinatorio. Principios fundamentales de conteo. Permutación. Tipos de permutación. Combinación. Propiedades fundamentales. Combinación con repetición.

PROBABILIDADES183

Las matemáticas y el juego

Experimento aleatorio. Espacio muestral. Evento o suceso. Fundamentos axiomáticos de la teoría de probabilidades. Tipos de sucesos. Cálculo de probabilidades. Probabilidad condicional.

MAGNITUDES PROPORCIONALES203

Midiendo la variación

Magnitudes proporcionales. Magnitudes directamente proporcionales DP. Magnitudes inversamente proporcionales IP. Proporcionalidad compuesta. Reparto proporcional. Regla de tres simple. Regla de tres compuesta. Aplicación en los sistemas de engranaje.

**TANTO POR CUANTO227****Matemática comercial**

Tanto por cuanto. Tanto por ciento. Descuentos y aumentos sucesivos. Variaciones porcentuales. Aplicaciones comerciales. Mezclas porcentuales.

TERCER EXAMEN SUMATIVO**PLANTEO DE ECUACIONES251****Diofanto y la ecuación**

Ecuación. Clasificación. Planteamiento de ecuaciones. Problemas sobre edades y móviles.

PLANTEAMIENTO DE INECUACIONES271**La matemática de la aproximación**

Desigualdad. Propiedades relativas a desigualdades. Inecuación lineal. Solución de inecuaciones usando puntos críticos.

FUNCIONES Y MODELOS MFUNCTIONALES295**Representaciones matemáticas**

Definición. Notación de una función. Evaluación de una función. Reconocimiento gráfico de una función. Variación directamente proporcional. Variación inversamente proporcional. Variación conjuntamente proporcional. Función lineal y modelo funcional lineal. Función cuadrática y modelos funcional cuadrático. Función exponencial y modelos funcional exponencial..

GEOMETRÍA PLANA: TRAZOS AUXILIARES319**Ingenio geométrico**

Concepto de trazo auxiliar. Criterios utilizados en un triángulo. Criterios utilizados en un cuadrilátero.

**ÁREAS Y PERÍMETROS DE REGIONES GEOMÉTRICAS ...339****Las celdas de las abejas**

Superficie y área. Figuras geométricas. Perímetros de figuras geométricas. Áreas de regiones triangulares. Áreas de regiones cuadrangulares. Relación entre áreas triangulares. Propiedades sobre áreas de regiones trapeciales. Área del círculo. Área del sector circular. Área del segmento circular. Área de la corona circular.



Introducción

El ser humano tiene muchas potencialidades que se van desarrollando en la educación formal vía una diversidad de actividades curriculares, con las cuales gana la experiencia suficiente que le permitirá desenvolverse con éxito en una futura vida universitaria y profesional.

También debemos tomar en cuenta que una persona desarrolla algunas de sus potencialidades más que otras; por ello, cada uno tiene algún grado de desarrollo de algunas habilidades pero no de otras.

Esos desarrollos en cada uno de los seres humanos, es progresivo, de modo que habilidades simples, cortas, aisladas, sirven de base para lograr desarrollar esa habilidad en otros niveles de mayor complejidad y/o al integrarse con otras habilidades, se constituyen en habilidades altamente complejas.

Por ello, el sistema educativo universitario se orienta a desarrollar ese tipo de habilidades y en este sentido exige un cierto nivel de desarrollo no sólo de conocimientos básicos (para adquirir otros más profundos y específicos), sino de habilidades mentales. Estas habilidades mentales no sólo se van adquiriendo, sino que también se van desarrollando, profundizando, especializando o complejizando.

Para que el desarrollo de las actividades académicas (formativas del futuro profesional), se requiere de personas que tengan un nivel adecuado, básico, para poder realizar las clases de actividades académicas de la institución de educación superior. Lo que se requiere es un nivel de conocimientos y un nivel de habilidades intelectuales mínimas para poder cumplir esas actividades académicas, por eso la Universidad selecciona con un



procedimiento de medición (Prueba de Admisión) a las personas que tienen estas capacidades.

La aptitud académica utiliza los conocimientos básicos de la matemática, para desarrollar y potenciar las habilidades y destrezas en los procesos de razonamiento inductivo, deductivo, análisis, síntesis e interpretación de enunciados y gráficos geométricos que le permitirán al estudiante afrontar con éxito los retos académicos.

El módulo de razonamiento matemático estructurado en 16 capítulos, pretende reforzar los aprendizajes de la Educación Básica Regular (EBR) y enlazarlo con la intencionalidad de la educación superior.

Para tal propósito, cada capítulo inicia con la declaración de los objetivos a lograr en el aprendizaje y que se complementa con una lectura motivadora orientada a despertar el interés por el tema. Enseguida se brinda un resumen teórico con ejemplos ilustrativos desarrollados detalladamente. Luego se muestra el desarrollo de problemas tomando como referencia los aplicados en los diversos exámenes de admisión a la Universidad Nacional de Trujillo. Finalmente hay un conjunto de problemas propuestos con sus respectivas respuestas, que le servirán para transferir sus conocimientos.

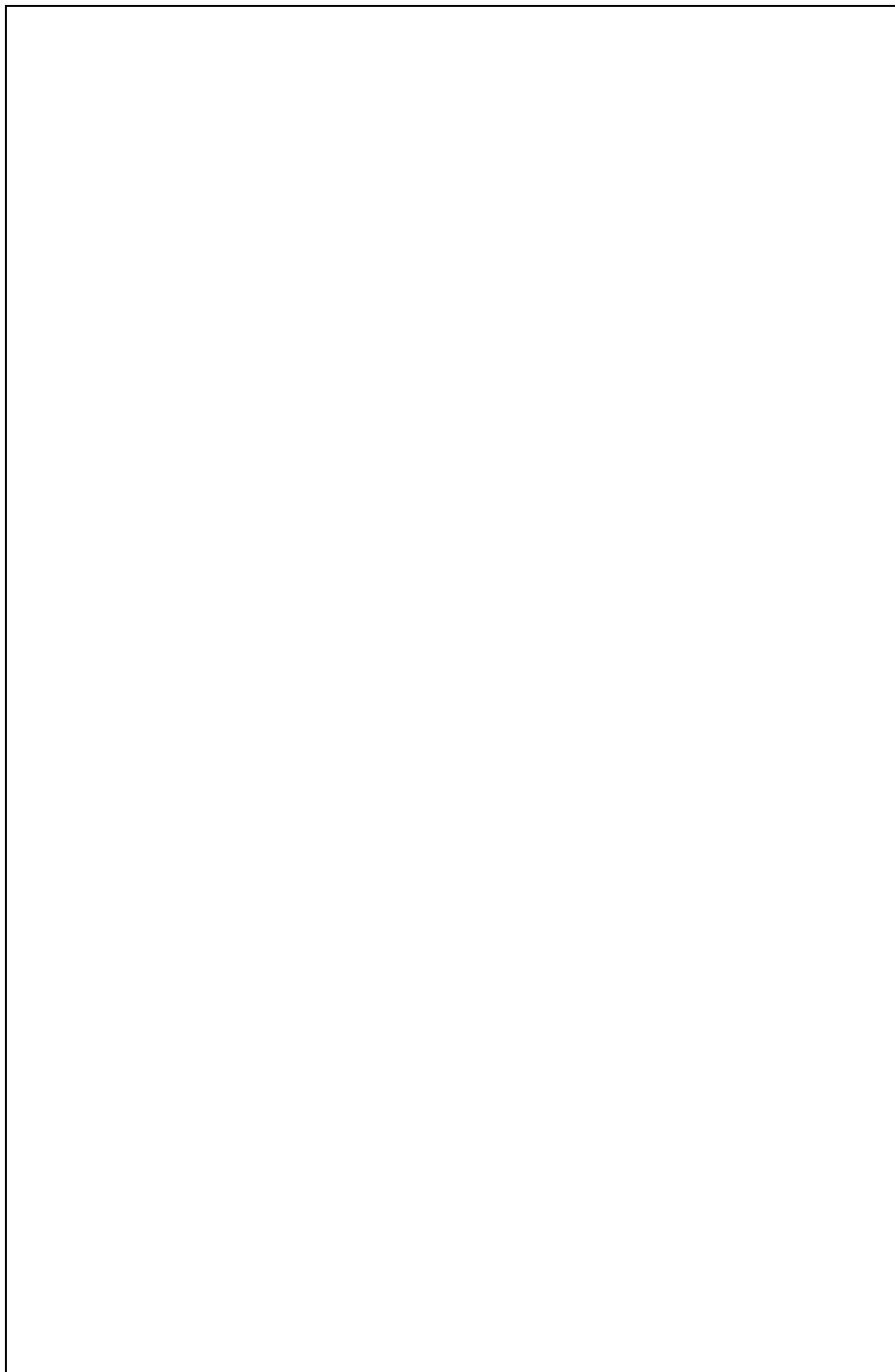
Esperamos que esta propuesta académica cumpla con las expectativas de la comunidad estudiantil y profesional.

Los autores



PRIMER EXAMEN SUMATIVO





**SEMANA 1****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Reducir expresiones numéricas utilizando las propiedades de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.
2. Resolver problemas empleando la manera más adecuada de traducir un enunciado verbal en enunciado simbólico matemático apoyándose en las operaciones básicas fundamentales con números reales.



LA IMPORTANCIA DEL ORDEN

Hanna recibe una entrada para observar la inauguración de los juegos bolivarianos en el coliseo "Gran Chimú", en ella observa: fila 15; asiento 24; pero ella quiere sentarse junto a su amigo Fabrizio, a quien Hanna lo llama apresuradamente por teléfono para dictarle la ubicación de su asiento: "15; 24". Al llegar Fabrizio busca rápidamente a su enamorada, olvidándose del detalle del orden y lo busca en el asiento designado por (24; 15); pero ingrata sorpresa la de Fabrizio porque allí encontró sentado al papá de Hanna que no lo lleva muy bien. Naturalmente no la encontró a su enamorada hasta que prendieron las luces. Ni Hanna ni Fabrizio olvidarán ya nunca que los números de los asientos del coliseo tienen un orden (fila; asiento); por consiguiente (15; 24) es diferente a (24; 15).



No es lo mismo resolver la operación $9 \div 3 \times 3$, de derecha a izquierda que de izquierda a derecha. En el primer caso el resultado es uno y en el segundo es nueve.

Éste capítulo basa su importancia en la aplicación que se tiene sobre los procesos condicionados y reglamentados, que permite medir la capacidad para captar relaciones numéricas y efectuar las operaciones matemáticas fundamentales en $\mathbb{R}$.

Se toma en cuenta su definición, el modo de aplicarlas bajo las condiciones o restricciones en las cuales ha sido definida así como el orden jerárquico operacional para reducir expresiones numéricas a su forma más simple.

Se enfatizará el uso algorítmico de las siete operaciones convencionales en $\mathbb{R}$. Adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación y sus propiedades, así como el empleo de la generatriz y la jerarquía operacional.



1. OPERACIÓN CONVENCIONAL

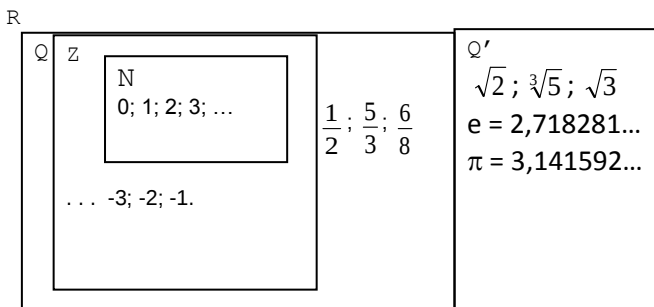
Una operación es una relación que tiene una regla de correspondencia mediante el cual uno o más objetos de un conjunto, denominados operandos, son utilizados para obtener otro objeto del mismo conjunto.

Una operación se convierte en convencional cuando su algoritmo es aceptado universalmente. Estas son: adición sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación.

2. EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES

La ejecución de las operaciones se desarrolla siempre en un conjunto numérico. Para nuestro caso será el Conjunto de los Números Reales simbolizado con $\mathbb{R}$, que se caracteriza por ser infinito y denso.

El sistema de los números reales consiste en el conjunto $\mathbb{R}$ provista de las operaciones convencionales y de dos relaciones, la igualdad y el orden.



3. GENERATRIZ DE UN DECIMAL

Un número decimal es la expresión lineal de una fracción, la cual se obtiene al dividir el numerador con su correspondiente denominador.

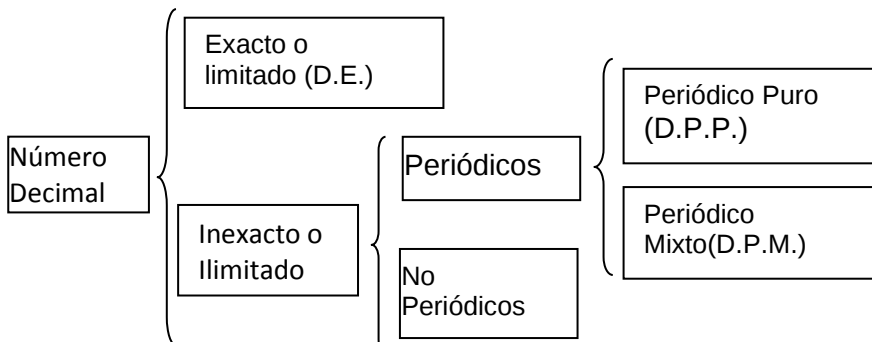
Así tenemos que: $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{2}{3} = 0,\bar{6}$; $\frac{16}{15} = 1,0\bar{6}$

En general si f es una fracción entonces su escritura es:

$$f = a, \underbrace{a \ b \ c \ d}_{\text{parte decimal}}$$



Los números decimales se clasifican de acuerdo al número de cifras en la parte decimal. Siguiendo el esquema:



Un decimal es **EXACTO (D.E.)** si la cantidad de cifras en la parte decimal es limitada. Así tenemos:

0,125; -2,75; 0,0512; 0,777777

Un decimal es **PERIÓDICO PURO(D.P.P.)** cuando la parte decimal consta de una cifra o un grupo de cifras ordenadas llamado período, que se repiten indefinidamente. Así tenemos:

- * $8,3333... = 8,\hat{3}$
- * $0,363636... = 0,\overline{36}$
- * $a,bcbcbc... = a,\overline{bc}$
- * $a,bcdcbcd... = a,\overline{bcd}$
- * $0,00a00a00a... = 0,\overline{00a}$
- * $a,0a0a0a... = 0,\overline{0a}$

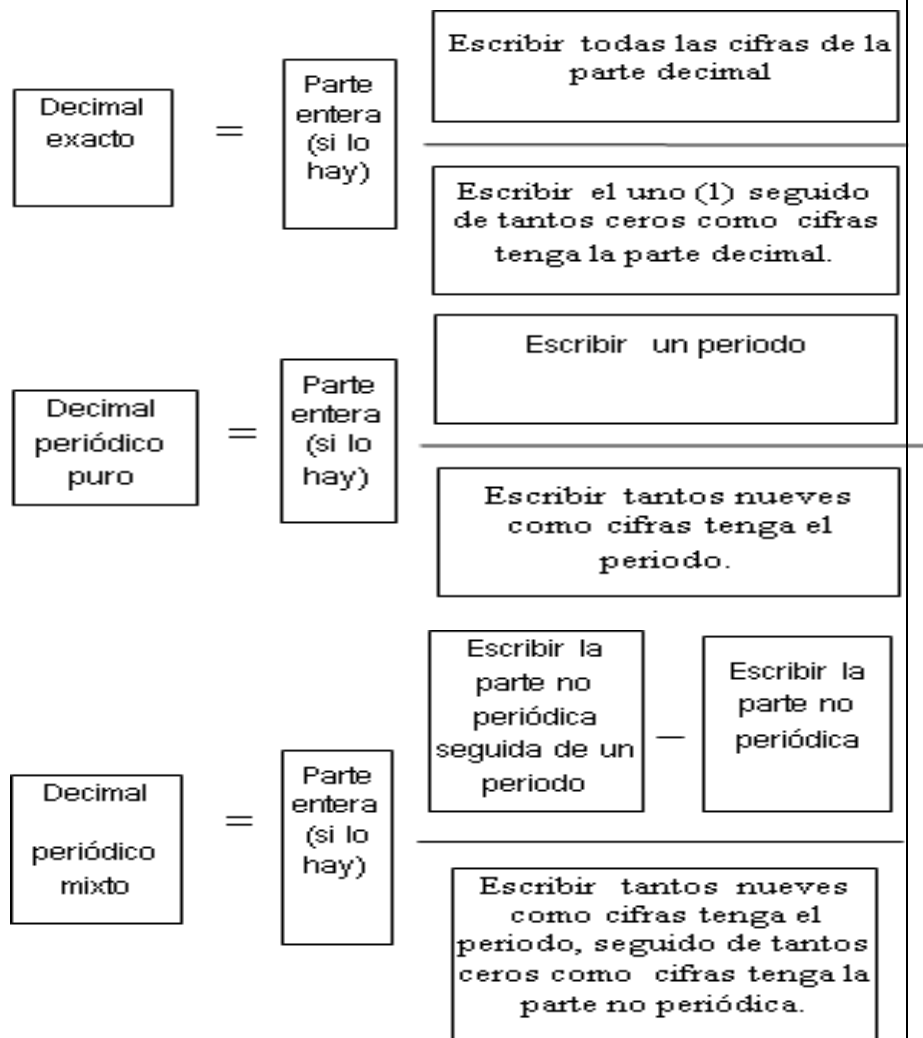
Un decimal es **PERIÓDICO MIXTO (D.P.M.)** cuando la parte decimal consta de un período precedido por una cifra o grupo de cifras, llamado parte no periódica. Así tenemos:

- * $5,7222... = 5,7\overline{2}$
- * $-0,33868686... = -0,338\overline{6}$
- * $a,bcdddd... = a,bc\overline{d}$
- * $a,bcdecdecde... = a,bc\overline{dec}$
- * $0,00aaaaa... = 0,00\overline{a}$
- * $0,0ababab... = 0,0a\overline{bab}$

El transformar un número decimal (sin considerar los no periódicos) a su correspondiente fracción significa hallar la **GENERATRIZ** de dicho decimal, es decir, conseguir la fracción que generó dicho decimal.



Por lo tanto tenemos procedimientos para calcular la fracción generatriz asociada a un decimal de decimales: exactos, periódicos puros y periódicos mixtos. Estos son:





Ejemplo ilustrativo 1. Al simplificar, resulta:

$$B = \frac{0, \overline{2} \div 0,0\overline{2} + 79}{1 - 0,2 \div 0, \overline{02}} + (0,025)^{-1}$$

A) 10
D) 40

B) 20
E) 50

C) 30

RESOLUCIÓN:

Hallando la generatriz tenemos que:

$$0, \overline{2} = \frac{2}{9} \quad (D.P.P.)$$

$$0, \overline{02} = \frac{2}{99} \quad (D.P.P.)$$

$$0,0\overline{2} = \frac{2}{90} \quad (D.P.M.)$$

$$0,025 = \frac{25}{1000} = \frac{1}{40} \quad (D.E.)$$

$$0,2 = \frac{2}{10} \quad (D.E.)$$

Reemplazando tenemos:

$$B = \frac{\frac{2}{9} \div \frac{2}{90} + 79}{1 - \frac{2}{10} \div \frac{2}{99}} + \left(\frac{1}{40} \right)^{-1}$$

$$B = \frac{89}{-89/10} + 40$$

$$B = -10 + 40$$

$$B = 30$$

Importante

$$\frac{2}{9} \div \frac{2}{90} = \frac{2}{9} \times \frac{90}{2} = 10$$

$$\frac{89}{\frac{-89}{10}} = \frac{1}{\frac{-89}{10}} = -10$$

CLAVE "C"

**4. POTENCIACIÓN, RADICACIÓN Y LOGARITMACION**

Existe relación directa entre estas operaciones. Analiza:

$$\sqrt[4]{81} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^4 = 81$$

$$\log_3 81 = 4 \quad \text{porque} \quad 3^4 = 81$$

Es decir **3 es la base** de la potenciación y **4 es el exponente** de la potenciación.

5. PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

✓ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

✓ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} ; a \neq 0$

✓ $a^{-n} = \frac{1}{a^n} ; a \neq 0$

✓ $a^0 = 1 ; a \neq 0$

✓ $(a^m)^n = a^{m \times n}$

✓ $(a \times b)^n = a^n \times b^n$

✓ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} ; b \neq 0$

✓ $a^{b^{c^d}} = a^{b^e} = a^f = g$



**6. PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN**

$$a \text{ y } b \geq 0, \quad n: \text{ par}$$

$$\checkmark \quad \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$$

$$\checkmark \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \quad b \neq 0$$

$$\checkmark \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\checkmark \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \times n]{a}$$

$$\checkmark \quad \sqrt[2n-1]{a} \in \mathbb{R} \quad ; \quad \forall a \in \mathbb{R} \text{ y } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\checkmark \quad \sqrt[2n]{a} \in \mathbb{R} \leftrightarrow a \geq 0 \quad \text{ y } \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

**7. LOGARITMACIÓN**

$$\log_b N = x \leftrightarrow b^x = N,$$
$$\text{además } N > 0 \quad ; \quad b > 0 \wedge b \neq 1$$

Donde “b” se denomina base, “N” número y “x” logaritmo.

Se lee: “Logaritmo en base b de N es x”

De la definición se desprende:

$$\checkmark \quad \log_b b^x = x$$

y

$$b^{\log_b N} = N$$

$$\checkmark \quad \log_b b = 1$$

y

$$\log_b 1 = 0$$

$$\checkmark \quad \log_{10} b = \log b$$

y

$$\log_e b = \ln b$$



Ahora veamos otras propiedades:

7.1 Simplificación o amplificación de un logaritmo

$$\log_{(b^n)}(a^m) = \frac{m}{n} \log_b a$$

Y sus principales consecuencias son:

✓ Cuando $a = b$

$$\log_{(b^n)}(b^m) = \frac{m}{n}$$

✓ Cuando $m = n$

$$\log_{(b^n)}(a^n) = \log_b a$$

✓ Cuando $n = 1$

$$\log_{(b)}(a^m) = m \cdot \log_b a$$

7.2 Operaciones con logaritmos de igual base

✓ **Adición**

$$\log_b a + \log_b c = \log_b (a \times c)$$

✓ **Sustracción**

$$\log_b a - \log_b c = \log_b (a \div c)$$

✓ **División**

$$\log_b a \div \log_b c = \log_c a \quad \vee \quad \frac{\log_b a}{\log_b c} = \log_c a$$

Nota.- Tanto en la adición como en la sustracción es importante precisar el paréntesis.

Interpreta lo siguiente:

$$(\log_b a)^n = \log^n_b a \neq \log_b a^n$$



7.3 Multipliación de logaritmos

$$\log_b a \times \log_a c = \log_b c$$

De donde se concluye:

✓ $\log_b a \times \log_a b = 1$

✓ $\log_b a = \frac{1}{\log_a b} \quad \vee \quad (\log_a b)^{-1} = \log_b a$

✓ $\log_b a \times \log_a c \times \log_c d = \log_b d$

7.4 Cuando el logaritmo es exponente

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

Nota.- Las propiedades de todas las operaciones deben interpretarse siempre de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

8. COLOGARITMO

Se define como el logaritmo de la inversa de “N” en la misma base “n”. Así:

$$\text{Co log}_n N = \log_n \left(\frac{1}{N} \right)$$

9. ANTILOGARITMO

Es otra forma de expresar la función exponencial. Así:

$$\text{anti log}_b N = b^N$$

**¡Un poco de historia!**

El descubrimiento de los logaritmos no se produjo aisladamente. Dos caminos condujeron a su hallazgo: los cálculos trigonométricos para las investigaciones astronómicas aplicables a la navegación; y el cálculo de las riquezas acumuladas conocidas como interés compuesto.

Henry Briggs, quien fue el primero que hizo las tablas logarítmicas en base 10 explica: "los logaritmos son números inventados para resolver más fácilmente los problemas de aritmética y geometría. Con ellos se evitan todas las molestias de las multiplicaciones y divisiones, de manera que se hacen solamente adiciones y sustracciones..."

**Ejemplo ilustrativo 2:**

Analiza si las expresiones son verdaderas (V) o falsas (F)

I) $\sqrt{\log 0,0001} = -\log 100$

II) Todo número impar es la diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos.

III) $\sqrt[4]{(-2)^4} = -\sqrt[4]{2^4}$

IV) El cuadrado de todo número real perteneciente al intervalo $\langle -2 ; 5 \rangle$ pertenece siempre al intervalo $\langle 4 ; 25 \rangle$

La conclusión correcta es:

A) FVFV

B) VVFF

C) FVFF

D) VVVF

E) FVVV

RESOLUCION:

I) En el primer miembro:

$$\sqrt{0,0001} = \sqrt{10^{-4}} = \sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

En el segundo miembro: $-\log 100 = -2$

Por lo tanto es falso.



- II) Debes recordar que un número impar tiene la forma $(2n - 1)$ tomando en cuenta que $n \in \mathbb{Z}$ y también que " n " y " $n - 1$ " son consecutivos.

Primera posibilidad:

$$n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$$

Segunda posibilidad:

$$(n - 1)^2 - n^2 = -2n + 1$$

Por lo tanto es verdad.

- III) En el primer miembro operando según jerarquía operacional de dentro hacia afuera resulta:

$$\sqrt[4]{(-2)^4} = \sqrt[4]{16} = 2$$

En el segundo miembro usando el mismo criterio se obtiene que:

$$-\sqrt[4]{2^4} = -\sqrt[4]{16} = -2$$

Por lo tanto es falso.

- IV) Recordando que el cuadrado de todo número real siempre es mayor o igual que cero entonces:

$$\text{Si } -2 < x < 5 \text{ entonces siempre } 0 \leq x^2 < 25$$

Por lo tanto es falso.

Finalmente la respuesta es FVFF.

CLAVE "C"

Ejemplo ilustrativo 3:

Al efectuar $(0,05)^{-1} - \sqrt[5]{6\sqrt[5]{7776}} : 2 \times \text{Log}_2 \left[\text{Log}_2 (256^{-4})^{-1} \right]$ se obtiene:

- A) 35
D) 5

- B) 25
E) 15

- C) 20

**RESOLUCION:**

$$20 - \sqrt{6^5 \sqrt{2^5 \cdot 3^5}} : 2 \times \text{Log}_2 [\text{Log}_2 (2^8)^4]$$

$$20 - \sqrt{6 \cdot 2 \cdot 3} : 2 \times \text{Log}_2 [\text{Log}_2 (2^{32})]$$

$$20 - 6 : 2 \times \text{Log}_2 [32] \Rightarrow 20 - 6 : 2 \times 5 = 5$$

CLAVE “D”**Ejemplo ilustrativo 4:**

Si $\log_{abcd} b = \frac{1}{2}$; $\log_{abcd} c = \frac{1}{3}$ y $\log_{abcd} (a^2 bc) = \frac{2}{3}$; entonces el valor de $\log_{abcd} d$ es:

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $-\frac{1}{3}$

RESOLUCION:

$$\log_{abcd} (a^2 bc) = \frac{2}{3} \Rightarrow \log_{abcd} a^2 + \log_{abcd} b + \log_{abcd} c = \frac{2}{3}$$

$$\log_{abcd} a^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \log_{abcd} a = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \Rightarrow \log_{abcd} a = -\frac{1}{12}$$

$$\log_{abcd} b = \frac{1}{2} \quad \log_{abcd} c = \frac{1}{3} \quad \log_{abcd} d = x$$

$$\log_{abcd} [abcd] = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + x$$

$$1 = \frac{9}{12} + x$$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_{abcd} d = \frac{1}{4}$$

CLAVE “D”



10. OPERACIÓN COMBINADA

En el transcurso de la historia de la matemática han existido acuerdos respecto a que ciertas operaciones tienen que ejecutarse unas antes que otras. Estos acuerdos tienen un fundamento, que lo ejemplificamos a continuación:

“Imagina que tienes un almacén de bolsas de arroz y te han pedido que realices el inventario, es decir cuántas bolsas de arroz tienes en total. Lo que recuerdas es que la última vez dejaste en el almacén 1200 bolsas, luego el camión que sabías que traía siempre 180 bolsas en cada viaje, solo trajo la mitad y finalmente en cada una de las cinco tiendas que te hicieron pedidos dejaste 45 bolsas. ¿Cuántas bolsas de arroz tienes en tu almacén?

Seguro que la operación combinada asociada a este texto es:

$$1200 + 180 \div 2 - 5 \times 45$$

Y seguro que la respuesta es 1065, pues inicialmente tuviste que conocer la cantidad de bolsas que te dejó el camión, luego conocer cuántas bolsas repartiste y finalmente luego de una suma y resta conocer la respuesta.”

Entonces existe un orden operacional que lo da el contexto y que luego se transforma en un convenio.

La operación combinada es una expresión matemática que asocia elementos del conjunto $\mathbb{R}$ con dos o más operaciones convencionales.

Para su simplificación se usa la siguiente jerarquía operacional:

Primero, las operaciones dentro de los signos de agrupación, del interior al exterior. Asimismo arriba o debajo de la barra fraccionaria.

Segundo, las operaciones que tengan raíces, potencias y logaritmos en el orden que aparezcan del interior al exterior.

Tercero, evalúe la multiplicación y división en el orden que aparezcan de izquierda a derecha.

Cuarto, ejecute adiciones y sustracciones en el orden que aparezcan de izquierda a derecha.

**Ejemplo ilustrativo 5:**

Verifica las siguientes expresiones equivalentes:

$$a + b \times (c)^{1/2} = a + b\sqrt{c}$$

$$a + (b \times c)^{1/2} = a + \sqrt{b.c}$$

$$(a + b \times c)^{1/2} = \sqrt{a + b.c}$$

Ejercicios Resueltos

1.- Si $m = (4 + \sqrt{17})$ y $n = (\sqrt{17} - 4)$

Entonces al simplificar:

$$\left(m^{\log_n 4\sqrt{17}} + n^{\log_m 4\sqrt{17}} \right)^{-2} \text{ se obtiene:}$$

A) 4

B) $\sqrt{17}$

C) 17

D) 34

E) 68

RESOLUCIÓN:

Reemplazando **m** y **n** en la expresión resulta:

$$\left[(\sqrt{17} + 4)^{\log_{(\sqrt{17}-4)} 4\sqrt{17}} + (\sqrt{17} - 4)^{\log_{(\sqrt{17}+4)} 4\sqrt{17}} \right]^{-2}$$

Aplicando conjugadas a las bases:

$$(\sqrt{17} + 4)(\sqrt{17} - 4) = 1$$

$$\sqrt{17} + 4 = \frac{1}{\sqrt{17} - 4}$$

$$\sqrt{17} + 4 = (\sqrt{17} - 4)^{-1}$$

Luego:

$$\left[(\sqrt{17} + 4)^{\log_{\frac{1}{\sqrt{17}-4}} 4\sqrt{17}} + (\sqrt{17} - 4)^{\log_{\frac{1}{\sqrt{17}+4}} 4\sqrt{17}} \right]^{-2}$$



$$\left[(\sqrt{17} + 4)^{\log_{(\sqrt{17}+4)}(4\sqrt{17})^{-1}} + (\sqrt{17} - 4)^{\log_{(\sqrt{17}-4)}(4\sqrt{17})^{-1}} \right]^{-2}$$

$$\left[2(4\sqrt{17})^{-1} \right]^{-2} = 2^{-2} \cdot 4^2 \cdot \sqrt{17}^2 = 68$$

CLAVE “E”

2.- Si : $[245 - (244 - (243 - \dots - (2 - (1) \dots))] + 2]^2 = \overline{....abc}$

Entonces el valor de: $(a + b) \cdot c$, es:

A) 40

B) 35

C) 32

D) 28

E) 21

RESOLUCIÓN:

Usando inducción en los paréntesis internos tenemos:

$$\begin{array}{ll} (2 - (1)) = 1 & 2 \div 2 = 1 \\ (4 - (3 - (2 - (1)))) = 2 & \dots \quad 4 \div 2 = 2 \\ (6 - (5 - (4 - (3 - (2 - (1)))))) = 3 & \dots \quad 6 \div 2 = 3 \\ \vdots & \end{array}$$

Por tanto:

$$(244 - (243 - (242 - \dots - (2 - (1) \dots))) = 122 \dots \quad 244 \div 2 = 122$$

Entonces:

$$\left[245 - \left(\underbrace{244 - 243}_{-1} - \dots - \underbrace{(2 - (1) \dots)}_{-1} \right) + 2 \right]^2 = \overline{....abc}$$

$$[245 - 122 + 2]^2 = \overline{....abc}$$

$$(125)^2 = \overline{....abc}$$

$$15625 = \overline{....abc}$$

$$a = 6 \quad ; \quad b = 2 \quad ; \quad c = 5$$

Finalmente : $(a + b) \cdot c = (6 + 2) \cdot 5 = 40$

CLAVE “A”



3.- Asumiendo que: $E = \frac{3^{12}}{4^{-1}} + \frac{3^7 \times 5^4}{4^{-1}} + 9 \times 5^8$. Entonces el valor de la suma de las cifras de: $\sqrt{E} - 4^2 \times 3^4 - 3 \times 5^4$ es:

A) 7
D) 10

B) 8
E) 11

C) 9

RESOLUCION:

Aplicando exponente negativo resulta:

$$E = 3^{12} \cdot 4 + 3^7 \cdot 5^4 \cdot 4 + 9 \times 5^8$$

Formando un T.C.P.

$$E = (2 \cdot 3^6)^2 + 2(2 \cdot 3^6)(3 \cdot 5^4) + (3 \cdot 5^4)^2$$

$$E = (2 \cdot 3^6 + 3 \cdot 5^4)^2$$

Entonces:

$$\sqrt{E} = 2 \cdot 3^6 + 3 \cdot 5^4$$

Nos piden la suma de las cifras de:

$$\sqrt{E} - 4^2 \times 3^4 - 3 \times 5^4$$

$$2 \cdot 3^6 + 3 \cdot 5^4 - 4^2 \times 3^4 - 3 \times 5^4$$

Simplificando se obtiene:

$$2 \cdot 3^6 - 4^2 \times 3^4 = 3^4(2 \cdot 3^2 - 16) = 3^4(2) = 162$$

Luego la suma de las cifras es: $1 + 6 + 2 = 9$

CLAVE "C"



4.- Si : $\frac{AB}{2} = 1 = mn$, entonces al simplificar:

$\left(A^{\log_B 2}\right)\left(m^{\log_n 0,5}\right)$ se obtiene:

A) $\log_6 \sqrt[3]{4}$

B) $\log_4 \sqrt[3]{2}$

C) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

D) $\log_3 \sqrt[3]{2}$

E) $\log_2 \sqrt[3]{4}$

RESOLUCION:

$$\frac{AB}{2} = 1 = mn \Rightarrow n = \frac{1}{m} \quad y \quad A = \frac{2}{B} = 2B^{-1}$$

Luego reemplazando:

$$\left(A^{\log_B 2}\right)\left(m^{\log_n \frac{1}{2}}\right) = \left(2^{\log_B A}\right)\left(m^{\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{2}}\right)$$

$$\left(2^{\log_B (2B^{-1})}\right)\left(m^{\log_{\frac{1}{m}} \frac{1}{2}}\right) = \left(2^{\log_B 2 + \log_B B^{-1}}\right)\left(m^{\log_m 2}\right)$$

$$\left(2^{\log_B 2 + (-1)}\right)(2) \rightarrow \left(2^{\log_B 2 - 1}\right)(2^1) = 2^{\log_B 2 - 1 + 1} = 2^{\log_B 2}$$

$$2^{\frac{1}{\log_2 B}} = \log_2 \sqrt[3]{2}$$

CLAVE “E”

5.- El valor numérico de la siguiente expresión:

$$a^{\left(\frac{1+\log_a b}{1+\log_b a}\right)\log_b 4} + b^{\left(\frac{1+\log_b a}{1+\log_a b}\right)\log_a 5} \quad \text{es:}$$

A) - 20

B) 20

C) 9

D) 9/20

E) 1/20

**RESOLUCION:**

$$a^{\left(\frac{1+\frac{\log b}{\log a}}{1+\frac{\log a}{\log b}}\right)\frac{\log 4}{\log b}} + b^{\left(\frac{1+\frac{\log a}{\log b}}{1+\frac{\log b}{\log a}}\right)\frac{\log 5}{\log a}}$$

$$a^{\left(\frac{\frac{\log a + \log b}{\log a}}{\frac{\log a + \log b}{\log b}}\right)\frac{\log 4}{\log b}} + b^{\left(\frac{\frac{\log b + \log a}{\log b}}{\frac{\log b + \log a}{\log a}}\right)\frac{\log 5}{\log a}}$$

$$a^{\left(\frac{\log b}{\log a}\right)\frac{\log 4}{\log b}} + b^{\left(\frac{\log a}{\log b}\right)\frac{\log 5}{\log a}}$$

$$a^{\log_a 4} + b^{\log_b 5} = 4 + 5 = 9$$

CLAVE “C”

6.- Al reducir: $E = \frac{999^2 + 1998 + 1}{(73 \log_4 16)^2 - 1} \times \frac{147}{145^{-1}} \div \frac{\log 10^{100}}{(1 + 3 \times 3)^{-2}}$

El valor que se obtiene, es:

- A) 5 B) 6 C) 100 D) 10 E) 15

RESOLUCIÓN:

$$E = \frac{999^2 + 2(999) + 1}{(73 \log_{2^2} 4^2)^2 - 1} \times 147 \cdot (145) \div \frac{100 \cdot \log 10}{(10)^{-2}}$$

$$E = \frac{(999 + 1)^2}{(73(2))^2 - 1} \times 147 \cdot (145) \div \frac{100}{(10)^{-2}}$$

$$E = \frac{(999 + 1)^2}{1} \times 1 \div \frac{100}{(10)^{-2}} \Rightarrow E = (1000)^2 \div (10)^4$$

$$E = \frac{(10^3)^2}{10^4} = \frac{10^6}{10^4} = 10^2 = 100$$

CLAVE “C”



7.- En la igualdad: $\sqrt[3]{0,9} + \frac{9}{\sqrt[3]{1,1}} = (\sqrt[a]{a+b})^b$

a y b son naturales y $a+b < 50$, el valor de $\sqrt[3]{a \times b}$ es:

- A) 4 B) 6 C) 9 D) 8 E) 3

RESOLUCIÓN:

$$\sqrt[3]{0,9} + \frac{9}{\sqrt[3]{1,1}} = (\sqrt[a]{a+b})^b$$

$$\sqrt[3]{\frac{9}{10}} + \frac{9}{\sqrt[3]{\frac{10}{9}}} = (\sqrt[a]{a+b})^b \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{9}{10}} + 9\sqrt[3]{\frac{9}{10}} = (\sqrt[a]{a+b})^b$$

$$10\sqrt[3]{\frac{9}{10}} = (\sqrt[a]{a+b})^b \Rightarrow \sqrt[3]{900} = (\sqrt[a]{a+b})^b$$

$$\sqrt[3]{30^2} = (\sqrt[a]{a+b})^b \Rightarrow \sqrt[18]{18+12}^{12} = (\sqrt[a]{a+b})^b$$

Por lo tanto: $a=18$ y $b=12$

Luego $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{12 \times 18} = 6$ **CLAVE "B"**

Ejercicios Propuestos



1. Sabiendo que:

$$U = \frac{\log \sqrt[4]{6}}{\log \sqrt{12}} - \text{co} \log_{12} \sqrt{24} \quad ; \quad N = \log_2 16 \div 2 - \log_2 [16 \div (U+1)]$$

$T = \text{anti} \log_4 \log_8 (3T)$. El valor de $U + N + T$ es:

- A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11



2. Un número M es múltiplo de cinco y se forma con 51 cifras significativas de modo que 50 de ellas sean iguales. Si la suma de las cifras de M es 155 entonces la suma de las cifras del cuadrado de M es:

A) 154 B) 155 C) 156 D) 157 E) 158

3. La raíz cuadrada de: $\sqrt{\frac{12219}{12223^{-1}}} + 4 + \sqrt[3]{990 \times 1010 + 100}$

tiene como producto de cifras:

A) 12 B) 1 C) 2 D) 6 E) 3

4. Al simplificar:

$$1 + {}^{1+\log 6}\sqrt{(21 \times 10^4 + 6 \times \text{anti log } 3)}^{1-\log 5}$$

resulta:

A) 6 B) 4 C) 9 D) 12 E) 15

5. Siendo:

$$P = \sqrt[3]{1 + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{27}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt{28}}{3\sqrt{3}}}$$

entonces el valor de $P^3 + P^2 + P + 4$ es:

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

6. Al efectuar:

$$0,01\widehat{3} + 0,02\widehat{6} + 0,040 + 0,05\widehat{3} + \dots + 0,98\widehat{6} + 1$$

resulta:

A) 37 B) 75 C) 38
D) 74 E) 37,5



7. Siendo a , b y c reales tal que: $a^2 + b^2 = c^2$ y además:

$$\log_3(c^2 - b^2 + 1) + \log_4(c^2 - a^2 + 1) = 0$$

El valor de $a - b + 3$ es:

- A) 5 B) 1 C) 3
D) 4 E) 2

8. Sabiendo que $\log_{12} 3 = a$ entonces el valor de $\log_{12} 32$, es:

- A) $\frac{1}{2}(1 - a)$ B) $\frac{2}{3}(1 - a)$ C) $\frac{5}{4}(1 - a)$
D) $\frac{3}{4}(1 - a)$ E) $\frac{5}{2}(1 - a)$

9. Asumiendo los valores:

$$J = \sqrt[3]{2010 + \sqrt{17}} \text{ y } C = \sqrt[3]{2007 + \sqrt{17}}$$

el valor de $J^9 - 9 \times J^3 \times C^3 - C^9$, es:

- A) 3 B) 9 C) 27
D) 81 E) 243

10. De los 1 000 nuevos soles que lleva Hana al “casino-bar”, gana y pierde alternadamente en cada jugada de la siguiente forma: $1/4$; $1/5$; $1/3$; $1/4$; $1/5$; $1/3$; . . . Si en cada jugada apuesta siempre todo lo que tiene entonces luego de 19 jugadas tiene en nuevos soles es:

- A) 760 B) 580 C) 640 D) 450 E) 820



11. Al simplificar: $\frac{1-2 \times 10^{\text{Colog}6}}{100^{0,5-\text{Log}6}-0,1^{\text{Log}6}}$, resulta:

- A) 6 B) 9 C) 3 D) 12 E) 15

12. Sabiendo que: $\sqrt{a+2\sqrt{b}} = \sqrt{m} + \sqrt{n}$

porque $m+n=a$ y $m \times n=b$

El valor de $\sqrt{14+6\sqrt{5}} - \sqrt[4]{56+6\sqrt{80}}$ es:

- A) $\sqrt{5}-3$ B) 1 C) $\sqrt{5}-1$
D) 2 E) $\sqrt{5}-2$

13. Sabiendo que: $N = \overline{\dots 125}$. Además:

$$N + N^2 + N^3 + N^4 + \dots + N^{50} = \overline{\dots abc}$$

Entonces el valor de " $a+b+c$ ", es:

- A) 7 B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

14. Si $\sqrt[3]{10^{(x+\log x^x)}} = \sqrt[5]{6}$; entonces el $\log x$ es equivalente a:

- A) $\log 6 + \log 2$ B) $\log 3 - \log 5$ C) $\log 4 - \log 7$
D) $\log 5 - \log 7$ E) $\log 4 + \log 5$

15. Luego de reducir: $5^{n^2} \times 125^{3n} \times 625^5 = 8$

El valor de:

$P = \log_4(n+4) + \log_4(\log_8 \sqrt{5}) + \log_4(n+5)$; es:

- A) -1 B) 2 C) 1/2 D) -2 E) 4



16. Sabiendo que:

$$(2 + 6)(2^2 + 66)(2^3 + 666) \cdots \left(2^{10} + \underbrace{666 \cdots 66}_{10 \text{ cifras}} \right) = \sqrt{\cdots abcd},$$

Entonces el valor de: $(a + d - 2)^{b-c+2}$, es:

- A) 0 B) 4 C) 25
D) 27 E) 36

17. De la igualdad:

$$125^2 + 225^2 + 325^2 + \dots + 2625^2 + 2725^2 = \overline{\cdots abcd}$$

Hallar: $a + b - c + d$

- A) 2 B) 5 C) 7
D) 10 E) 12

18. Luego de simplificar:

$$R = \frac{1 - 2 \times 10^{\text{Colog}6}}{10^{1+2\text{Colog}6} - 10^{-\text{Log}6}} ; \text{ Resulta:}$$

- A) 6 B) $\log 6$ C) 1
D) $\log_6 10$ E) $2/3$

19. Sabiendo que logaritmo en base 3 de 12 es igual a "n" entonces el valor de logaritmo de 8 en base 12, es:

- A) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ B) $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ C) $\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$
D) $\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ E) $\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{n} \right)$



20. Usando las condiciones:

$$P = \sqrt[3]{2007 - 2\sqrt{502}}; \quad Q = \sqrt[3]{\sqrt{2008} - 2004}; \quad R = \sqrt[3]{4\sqrt{502} - 4007}$$

Simplificar la expresión:

$$\frac{P^3 + Q^3}{2P^3 + R^3} + \frac{4R^3 - 8Q^3}{P^3 - Q^3 + R^3 + 3}$$

A) 1
D) $\sqrt{502}$

B) 7
E) 2008

C) 2007



CLAVES

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C | 2. D | 3. B | 4. C | 5. C |
| 6. C | 7. C | 8. E | 9. C | 10. C |
| 11. A | 12. D | 13. A | 14. B | 15. C |
| 16. B | 17. E | 18. A | 19. E | 20. A |

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

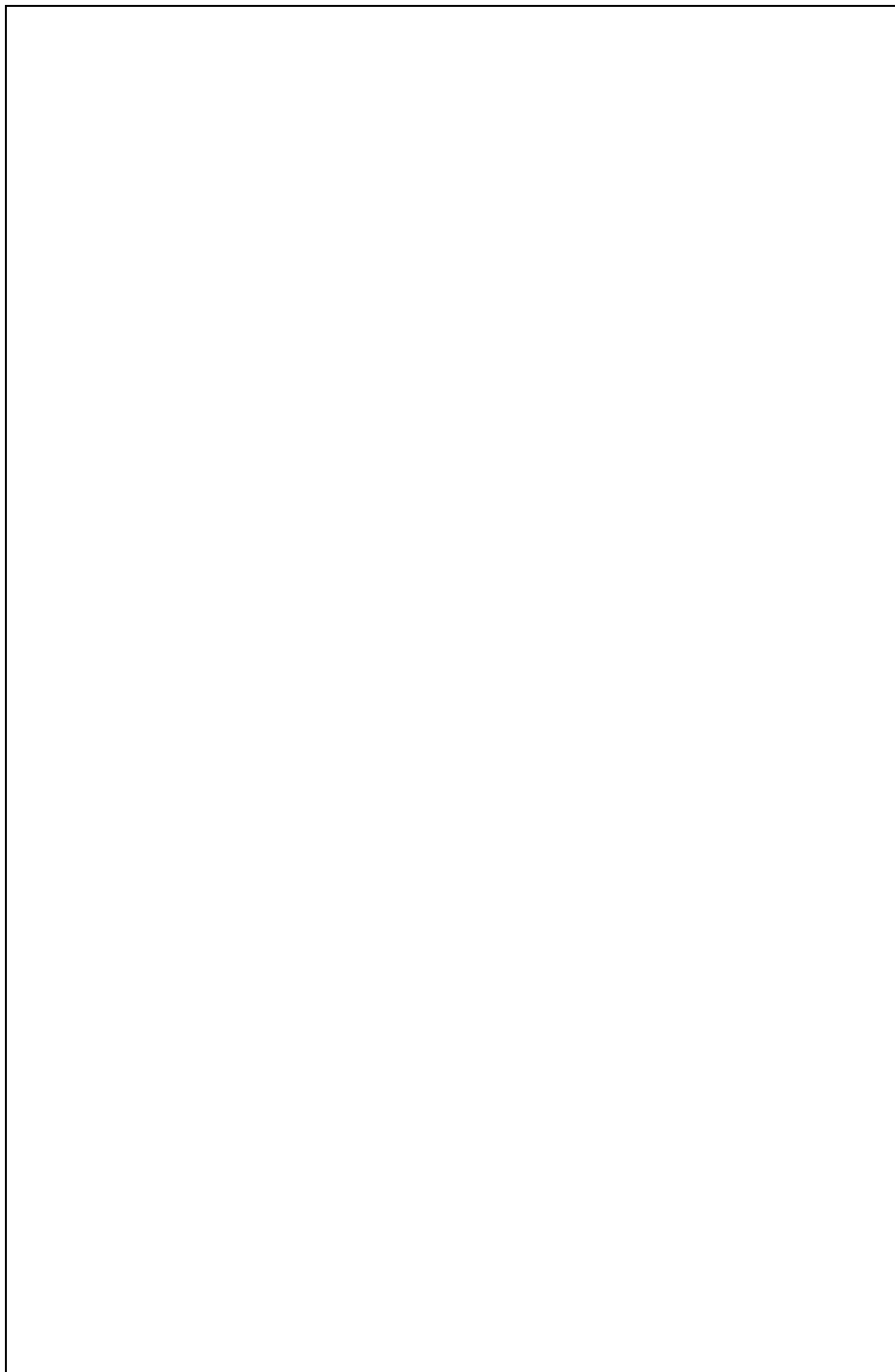
Huerta Flores , J. y Reyes Rodriguez, J. (2006) Operación (1ª edición). Perú: Frama.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3ª edición). Perú: Moshera.

Quispe Pauyacc, A. (2006) Logaritmos Teoría y problemas (1ª edición). Perú: Cuzcano.

Torrecillas Jover, B. (2013) Fermat el mago de los números (2ª edición). España: Nivola.

Yáñez Díaz, J. y Yáñez Díaz, J. (2015) Razonamiento Matemático Teorico Práctico (1ª edición). Perú: Aplicación Gráfica S.R.L.



**SEMANA 2****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Aplicar el proceso inductivo - deductivo en la simplificación de expresiones numéricas complejas seleccionando adecuadamente el procedimiento.
2. Identificar la o las cifras terminales en una expresión numérica compleja o el residuo utilizando adecuadamente las propiedades.
3. Aplicar identidades algebraicas en la resolución de operaciones numéricas.

**ESTRATEGIA OPERATIVA ALTERNATIVA**

"Gerly tiene que realizar la siguiente operación 999999999999999998^2 y dar como respuesta sobre la cantidad de nueves, la cantidad de ceros, la cantidad de total de cifras y la suma de todas las cifras"

Como se da cuenta que la base está compuesta de nueves y un ocho final entonces decide utilizar la estrategia de usar un nueve, luego dos nueves, enseguida tres nueves para no realizar operaciones extensas y completa el siguiente cuadro:

<i>operación</i>	<i>Potencia desarrollada</i>
98^2	9604
998^2	996004
9998^2	99960004
99998^2	9999600004
999998^2	999996000004

De donde puede extraer conclusiones referidas a las interrogantes planteadas inicialmente, pues observa que hay una regularidad en la estructura de cada potencia desarrollada y por lo tanto en la cantidad de nueves, ceros, cifras y número de cifras.

<i>operación</i>	<i>Potencia desarrollada</i>	<i># nueves</i>	<i># ceros</i>	<i># cifras</i>	<i>Suma de cifras</i>
98^2	9604				
998^2	996004				
9998^2	99960004				
99998^2	9999600004				

Finalmente se aprecia que analizó los casos particulares y en cada uno de ellos obtuvo un resultado, seguidamente los relacionó y obtuvo reglas que las aplicó a la operación que le pidieron efectuar.

Nos centraremos en dos formas de pensamiento que le permite al ser humano interpretar, describir y representar el mundo que lo rodea. Estos son el razonamiento inductivo y deductivo.



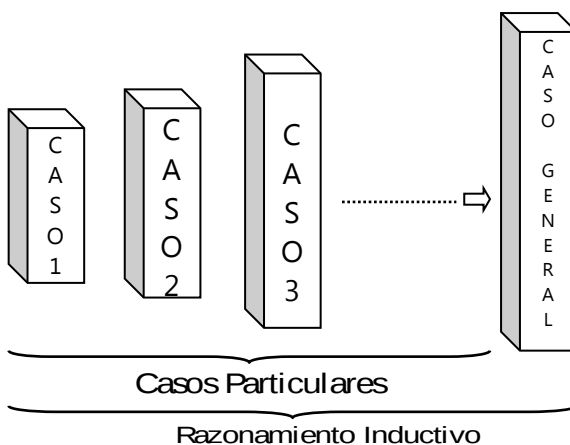
1. RAZONAMIENTO INDUCTIVO

Forma de pensamiento que permite realizar conjeturas o extraer conclusiones respecto a una sucesión de números, gráficas o situaciones problemáticas.

El uso de este tipo de razonamiento se sugiere cuando:

- ✓ El modo convencional indica exceso de operatividad.
- ✓ Observas orden, regularidad y/o repetitividad.

Entonces tu tarea consiste en reconocer las características comunes y en el caso 1, caso 2, caso 3, caso 4, y aplicar al caso general, que es el problema que te plantean.



Ejemplo ilustrativo 1

La suma de las cifras del resultado final de la operación es:

$$\sqrt[3]{\underbrace{999\dots 999}_{21 \text{ cifras}} \times \underbrace{1000\dots 0001}_{22 \text{ cifras}} + 1}$$

- A) 1
D) 4

- B) 2
E) 5

- C) 3

**RESOLUCION.-****Paso 1:**

$$\sqrt[3]{9 \times 11 + 1} = 10^{\frac{2}{3}}$$

2 es el doble de nueve

Paso 2:

$$\sqrt[3]{99 \times 101 + 1} = 10^{\frac{4}{3}}$$

4 es el doble de nueve

Paso 3:

$$\sqrt[3]{999 \times 1001 + 1} = 10^{\frac{6}{3}}$$

6 es el doble de nueve

Paso 4:

$$\sqrt[3]{9999 \times 10001 + 1} = 10^{\frac{8}{3}}$$

8 es el doble de nueve

Caso general:

En todos es una potenciación de base 10 y como exponente una fracción donde el numerador el doble de la cantidad de nueve y el denominador siempre es 3.

Entonces: $10^{\frac{42}{3}} = 10^{14} = 1000...000$

Finalmente la sumade las cifras es: 1

CLAVE “A”



2. **RAZONAMIENTO DEDUCTIVO**

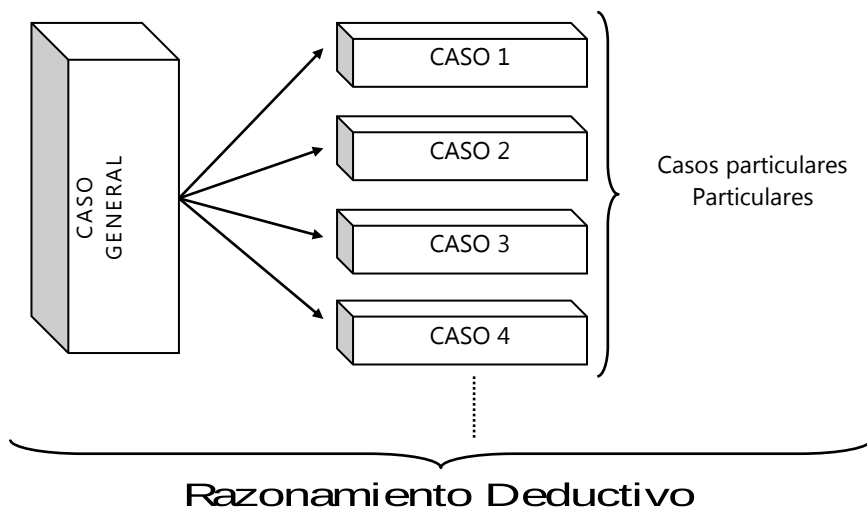
Forma de pensamiento que consiste en aplicar una o más reglas generales o convencionales en ciertos casos particulares.

En esta sesión las reglas generales serán las principales identidades algebraicas o alguna que se presente contextualmente en algún problema. Así como el algoritmo del cálculo de las cifras terminales.

El uso de este tipo de razonamiento se sugiere cuando:

- ✓ El modo convencional indica exceso de operatividad.
- ✓ Observas la estructura de alguna identidad algebraica o se pregunta por cifras terminales.

Entonces tu tarea consiste en aplicar el equivalente de la identidad algebraica identificada o la regla para obtener la(s) cifra(s) terminal(es).



Ejemplo ilustrativo 2

La raíz cúbica de:

$$10001^2 + 89998 \times 10001 - 89999$$

Es:

- A) 100
D) 10

- B) 1
E) 10000

C) 1000

**RESOLUCION.-**

Puedes observar que tiene la forma de un trinomio con las condiciones de factorización por el método del **aspa simple**, asumiendo que $x = 10001$.

Es decir:

$$x^2 + 89998x - 89999 = (x + 89999)(x - 1)$$

Entonces aplicando al problema resulta la expresión numerica:

$$(10001 + 89999)(10001 - 1) = 100000 \times 10000$$

$$(10001 + 89999)(10001 - 1) = 10^5 \times 10^4$$

$$(10001 + 89999)(10001 - 1) = 10^9$$

Por lo tanto la respuesta es: $\sqrt[3]{10^9} = 1000$

CLAVE “C”

El **Método deductivo** consiste en aplicar una **regla general** en ciertos **casos particulares**. Estas reglas generales sirven en las demostraciones matemáticas y garantizan la verdad de la conclusión. De manera práctica tienes que descubrir que identidad está presente en la expresión analizada y aplicarla regla. Principalmente usaremos las **principales identidades algebraicas**:

✓ $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$

✓ $m^3 \pm n^3 = (m \pm n)(m^2 \mp mn + n^2)$

✓ $(m \pm n)^2 = m^2 \pm 2mn + n^2$

✓ $(m \pm n)^3 = m^3 \pm n^3 \pm 3mn(m \pm n)$

✓ $mn \pm mp = m(n \pm p)$

✓ $ax^2 + bx + c = (mx + n)(px + q)$

Importante.- No olvides que las identidades pueden ser utilizadas de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Inclusive la diferencia de cuadrados y cubos propuestos observemos que proviene de un cociente notable:



$$\frac{a^{mk} - b^{nk}}{a^m - b^n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Veamos un ejemplo:

$$\frac{10^{24} - 7^{21}}{10^8 - 7^7} = 10^{16} + 10^8 \times 7^7 + 7^{14}$$

También puede ser:

$$\frac{10^8 - 7^4}{93} = \frac{(10^2)^4 - (7)^4}{10^2 - 7}$$

Y por lo tanto su desarrollo será:

$$(10^2)^3 + (10^2)^2 \times (7) + (10^2) \times (7)^2 + (7)^3$$

Finalmente:

$$10^6 + 10^4 \times 7 + 10^2 \times 7^2 + 7^3$$

Ejemplo ilustrativo 3

Al reducir:

$$T = \frac{\log 75^{\log 75} - 1}{\log 7,5} - \frac{\log 7,5^{\log 7,5} - 1}{\log 0,75}$$

Se obtiene:

A) 1

B) $\log 75$

C) 7,5

D) $\log 750$

E) $3/4$

RESOLUCIÓN

Usando propiedades de la logaritmación se obtiene la siguiente expresión equivalente:

$$\frac{\log 75 \times \log 75 - 1}{\log 75 - \log 10}$$



Ahora dándole forma de la estructura que tiene la **diferencia de cuadrados** resulta:

$$\frac{(\log 75)^2 - 1^2}{\log 75 - 1}$$

Aplicando el algoritmo de la diferencia de cuadrados se obtiene:

$$\frac{(\log 75 + 1)(\log 75 - 1)}{\log 75 - 1} = \log 750$$

Realizando el mismo análisis en la segunda fracción se obtiene que es igual a:

$$\log 7,5 + \log 10 = \log 75$$

Finalmente la respuesta es:

$$T = \log 750 - \log 75 = 1 \quad \text{CLAVE "A"}$$

3. **CIFRAS TERMINALES**

Al efectuar operaciones con números naturales (nuestro conjunto numérico) podemos establecer sus cifras terminales empleando un algoritmo práctico y sencillo.

Para el caso de las adiciones y sustracciones las cifras terminales se obtienen por simple inspección.

Para el caso de las multiplicaciones puedes tomar en cuenta estos casos más relevantes:

- ✓ Si un factor tiene cifra terminal cero entonces el producto tiene cifra terminal cero.
- ✓ Si un factor tiene cifra terminal 5 y los otros factores tienen cifra terminal un número impar entonces el producto tiene cifra terminal 5.

Si un factor tiene cifra terminal 5 y en los otros factores se observa que alguno de ellos tiene cifra terminal par entonces el producto tiene cifra terminal cero.

Para el caso de la potenciación de base y exponente entero positivo podemos tomar en cuenta los siguientes casos:

- ✓ Cuando la base es un número de cifra terminal **0, 1, 5 ó 6** la potencia tiene **la misma cifra terminal**.
- ✓ Cuando la base tiene cifra terminal **4 ó 9** se cumple:



$$\left(\text{.....}4 \right)^{par} = \text{.....}6$$

$$\left(\text{.....}4 \right)^{impar} = \text{.....}4$$

$$\left(\text{.....}9 \right)^{par} = \text{.....}1$$

$$\left(\text{.....}9 \right)^{impar} = \text{.....}9$$

✓ Cuando la base tiene cifra terminal **2, 3, 7 u 8** se cumple un ciclo de cuatro potencias. Siendo $k \in \mathbb{Z}^+$ se cumple:

$$\left(\text{.....}2 \right)^{4k} = \text{.....}6 \quad \left(\text{.....}2 \right)^{4k+n} = \text{.....}2^n$$

$$\left(\text{.....}3 \right)^{4k} = \text{.....}1 \quad \left(\text{.....}3 \right)^{4k+n} = \text{.....}3^n$$

$$\left(\text{.....}7 \right)^{4k} = \text{.....}1 \quad \left(\text{.....}7 \right)^{4k+n} = \text{.....}7^n$$

$$\left(\text{.....}8 \right)^{4k} = \text{.....}6 \quad \left(\text{.....}8 \right)^{4k+n} = \text{.....}8^n$$

El caso de dos o más cifras terminales lo dejamos a tu ingenio y creatividad. Te presentamos solamente algunos casos, asumiendo $k \in \mathbb{Z}^+$:

$$\left(\text{.....}25 \right)^k = \text{.....}25$$

$$\left(\text{.....}625 \right)^k = \text{.....}625$$

$$\left(\text{.....}125 \right)^{par} = \text{.....}625$$

$$\left(\text{.....}125 \right)^{impar} = \text{.....}125$$

$$\left(\text{.....}376 \right)^k = \text{.....}376$$

**Ejercicios Resueltos**

1.- La suma de las cifras del resultado de :

$$\sqrt{\frac{7992}{8010^{-1}}} + 81 + \sqrt[3]{\frac{7997}{8003^{-1}}} + 9 \quad \text{es:}$$

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 13 E) 15

RESOLUCIÓN:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(7992) \cdot (8010) + 81} + \sqrt[3]{(7997) \cdot (8003) + 9} \\ & \sqrt{(8001 - 9) \cdot (8001 + 9) + 81} + \sqrt[3]{(8000 - 3) \cdot (8000 + 3) + 9} \\ & \sqrt{8001^2 - 81 + 81} + \sqrt[3]{(8000^2 - 9 + 9)} \\ & \sqrt{8001^2} + \sqrt[3]{8000^2} = 8001 + (\sqrt[3]{20^3})^2 \\ & 8001 + 400 = 8401 \end{aligned}$$

Luego la suma de las cifras: $8 + 4 + 0 + 1 = 13$

CLAVE "D"

2.- El resultado de simplificar la expresión:

$$E = \left[\frac{999 \times 357357357}{(10^9 - 1) \times 1071 \times 0,6} \right]^{\log_{100}}, \text{ es:}$$

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

**RESOLUCIÓN:**

$$E = \left[\frac{999 \times 357357357}{(10^9 - 1) \times 1071 \times 0,6} \right]^{-\log 100}$$

$$E = \left[\frac{999 \times 357(1001001)}{999999999 \times 3 \times 357 \times \frac{6}{9}} \right]^{-\log 100}$$

$$E = \left[\frac{999 \times (1001001)}{999(1001001) \times 3 \times \frac{6}{9}} \right]^{-2} = \left(\frac{1}{2} \right)^{-2} = 4$$

CLAVE “B”

3.- Ana realiza el siguiente cálculo:

$$E = \underbrace{666 \dots \dots 666}_{20 \text{ cifras}}^2 - 56$$

Luego suma los dígitos de su resultado. Entonces dicha suma es múltiplo de:

- A) 2
D) 12

- B) 3
E) 13

- C) 11

RESOLUCIÓN:

$$E = \underbrace{666 \dots \dots 666}_{20 \text{ cifras}}^2 - 56$$

Por inducción:

$$2 \text{ cifras} \quad 66^2 - 56 = 4300$$

$$3 \text{ cifras} \quad 666^2 - 56 = 443500$$

$$4 \text{ cifras} \quad 6666^2 - 56 = 44435500$$

⋮



$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 20 \text{ cifras} \quad \underbrace{66\dots66^2}_{20 \text{ cifras}} - 56 = \underbrace{44\dots4355\dots500}_{19 \text{ cifras} \quad 18 \text{ cifras}}
 \end{array}$$

$$\text{Suma de cifras: } 19(4) + 3 + 18(5) + 0$$

$$73 + 3 + 90 + 0 = 169$$

Luego 169 es múltiplo de 13

CLAVE “E”

4.- Si $x = \sqrt[3]{2}$, el valor de:

$$M = \left(\sqrt{1 + (x+1)(x^2+1)(x-1)(x^4+1)} \right)^3 \text{ es:}$$

A) 12

B) 10

C) 25

D) 16

E) 49

RESOLUCION:

Ordenamos convenientemente y aplicamos diferencia de cuadrados:

$$M = \left(\sqrt{1 + (x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)} \right)^3$$

$$M = \left(\sqrt{1 + (x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)} \right)^3$$

$$M = \left(\sqrt{1 + (x^4-1)(x^4+1)} \right)^3 = \left(\sqrt{1 + x^8-1} \right)^3$$

$$M = \left(\sqrt{x^8} \right)^3 = (x^4)^3 = x^{12}$$

Luego reemplazando:

$$M = \left(\sqrt[3]{2} \right)^{12} = 2^4 = 16$$

CLAVE “D”

5.- Calcular el valor de:



$$R = \frac{\left(\overbrace{1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots}^{n-\text{sumandos}} \right) + n}{\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots}_{n-\text{sumandos}}}$$

A) 4

B) 6

C) 8

D) 9

E) 10

RESOLUCIÓN:

Por inducción matemática:

$$\text{Si: } n=1 \Rightarrow R = \frac{(1 \times 3) + 1}{1^2} = 4$$

$$\text{Si: } n=2 \Rightarrow R = \frac{(1 \times 3 + 3 \times 5) + 2}{1^2 + 2^2} = 4$$

$$\text{Si } n=3 \Rightarrow R = \frac{(1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7) + 3}{1^2 + 2^2 + 3^2} = 4$$

CLAVE "A"

Por lo tanto para los "n" sumandos siempre la respuesta será cuatro

6.- Si: $\overline{abcd} \times 9999999 = \dots\dots\dots 3518$ Entonces el valor de: $a + b + c + d$ es :

A) 10

B) 15

C) 20

D) 30

E) 35

RESOLUCIÓN:

Transformando:

$$\overline{abcd} \times (10000000 - 1) = \dots\dots\dots 3518$$

$$\overline{abcd0000000} - \overline{abcd} = \dots\dots\dots 3518$$

$$\dots(9-a)(9-b)(9-c)(9-d) = \dots\dots\dots 3518$$

Comparando:

$$9 - a = 3 \Rightarrow a = 6$$

$$9 - b = 5 \Rightarrow b = 4$$

$$9 - c = 1 \Rightarrow c = 8$$

$$10 - d = 2 \Rightarrow d = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 20$$

CLAVE "C"



7.- El valor de K luego de reducir:

$$K = \sqrt[4]{2 \times 4 \times 10 \times 82 \times 6562 + 1}, \text{ es:}$$

A) 27

B) 9

C) 64

D) 49

E) 81

RESOLUCION:

Si efectuamos los cálculos elementales en K obtendremos:

$$K = \sqrt[4]{2 \times 4 \times 10 \times 82 \times 6562 + 1} = \sqrt[4]{80 \times 82 \times 6562 + 1}$$

Todo problema operativo presenta generalmente un artificio o arreglo matemático para que sea más sencilla su operación.

$$K = \sqrt[4]{(81-1) \times (81+1) \times (81^2 + 1) + 1}$$

$$K = \sqrt[4]{(81^2 - 1) \times (81^2 + 1) + 1}$$

$$K = \sqrt[4]{81^4 - 1 + 1} = \sqrt[4]{81^4} = 81$$

CLAVE "E"**Ejercicios Propuestos**

1. La suma de las cifras del resultado de:

$$99993^2 + 2 \times 99993 - 35 \text{ es:}$$

A) 28

B) 39

C) 52

D) 43

E) 65

2. La suma de las cifras del resultado final de:

$$\frac{10006^4 - 2 \times 10006^2 + 1}{10006^2 + 2 \times 10006 + 1}, \text{ es}$$

A) 4

B) 6

C) 2

D) 9

E) 7



3. La suma de las cinco cifras de menor orden posicional del resultado final de:

$$\underbrace{222 \dots 22^2}_{80 \text{ cifras}} - \underbrace{666 \dots 66^2}_{79 \text{ cifras}} ; \text{ es:}$$

- A) 20 B) 26 C) 28
D) 22 E) 24

4. Al simplificar:

$$H = \frac{2008^3 + 1}{2009} + \sqrt{2015 \times 2017 + 1} - 2008^2$$

resulta:

- A) 18 B) 9 C) 5
D) 10 E) 15

5. Al operar: $9999998^2 + 4 \times 9999999$, la cantidad de cifras significativas que se observa en el resultado final es:

- A) 1 B) 14 C) 10
D) 5 E) 7

6. Siendo "s" la suma de las cifras de:

$$\frac{2008^3 - 2008^2 - 2008 + 1}{2008^2 - 2 \times 2008 + 1}$$

el producto de las cifras de " $s^2 + s$ ", es:

- A) 1 B) 9 C) 3 D) 6 E) 2

7. La suma de las cifras del resultado final de:

$$\sqrt{\frac{2014^3 - (10^2 - 6^2)}{2010}} - 12 - 4^5$$

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 22 E) 25



8. Al simplificar:

$$F = \frac{3 \times (29000 - 290)}{(1 - 146^2)(1 - 10^2)(1 - 50^{-1})^{-1}}$$

resulta:

A) 1/5

B) 2/5

C) 1/25

D) 2/25

E) 3/125

9. Si **T** representa la diferencia de los cuadrados de los dos mayores números pares de cuatro dígitos distintos y **U** representa la diferencia de los cuadrados de los dos menores números múltiplos de 5 de cuatro dígitos distintos, entonces el valor de **T - U** es:

A) 18900

B) 15600

C) 14400

D) 20000

E) 21500

10. En el campeonato interno de fútbol en el CEPUNT participaron sólo un grupo de equipos y jugaron todos contra todos en dos ruedas. Si se verificó que el total de partidos jugados es quince veces el número de equipos participantes entonces la cantidad de partidos jugados en la primera rueda es:

A) 105

B) 120

C) 136

D) 153

E) 171

11. La cifra terminal de la operación:

$$\left((10^4 - 1)^{4/9}\right)^{9999} \times (44 \times (10^2 + 1))^{10^4 - 1}$$

es:

A) 4

B) 6

C) 1

D) 9

E) 8

12. La suma de las cifras de:

$$N = \frac{\overbrace{1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \dots + 120}^{120 \text{ sumandos}}}{\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots}_{120 \text{ sumandos}}} + 120 \quad \text{Es:}$$

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7



13. El quíntuplo del valor de: $1002^2 - 990 \times 1002 + 989$
tiene como suma de cifras un número múltiplo de:

- A) 22 B) 3 C) 5
D) 7 E) 13

14. Al multiplicar todas las cifras del resultado final de:

$$11 \times \underbrace{555 \dots 5559}_{80 \text{ cifras}}$$

se obtiene:

- A) 125 B) 216 C) 512
D) 1000 E) 1728

15. Se sabe que: $P = 20132013^2 + 2012^2$

$$Q = 20132012^2 + 2013^2$$

La raíz cuadrada de: $10(P - Q) - 26 \times 10^5$

tiene como suma de cifras:

- A) 2 B) 8 C) 15
D) 19 E) 27

16. Si a la suma de:

$$P = \frac{2012^2 + 8043}{2012^2 + 12077} \quad \text{y} \quad Q = \frac{2012^2 + 12065}{2011^2 + 4022}$$

Le restas 4×2013^{-1} se obtiene:

- A) 2012/2013 B) 2013 C) 2
D) 2013/2012 E) 1/2013



17. Sabiendo que la suma y producto de los números reales “a” y “b” es $\sqrt[3]{12}$ y $2\sqrt[3]{18}$ respectivamente entonces el valor de:

$$Q = \left(\frac{a^{-3} \times b^{-3}}{a^{-3} + b^{-3}} \right)^{-1}$$

Es:

- A) $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ B) -24 C) $-\sqrt[3]{12}$
D) 48 E) $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$

18. El producto de todas las cifras significativas del producto:

$$\underbrace{999 \dots 9997}_{13 \text{ cifras}} \times \underbrace{999 \dots 9994}_{13 \text{ cifras}}$$

Es:

- A) 27^6 B) 54^6 C) 81^6
D) 108^6 E) 162^6

19. Sabiendo que M es una unidad menos que el cuadrado de 3×10^{20} y N es dos unidades menos que cien veces el cubo de 10^{13} , entonces la suma de las cifras de $M \times N$ es:

- A) 352 B) 361 C) 370
D) 379 E) 388

20. El cuádruplo de la expresión:

$$T = 556^{52} + 774^{73} \times 617^{80} - 3 \times 212^{29}$$

Tiene como cifra terminal:

- A) 6 B) 4 C) 0
D) 2 E) 8

**CLAVES**

1. D	2. D	3. E	4. B	5. A
6. D	7. C	8. C	9. A	10. B
11. A	12. E	13. A	14. B	15. A
16. C	17. B	18. B	19. A	20. A

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

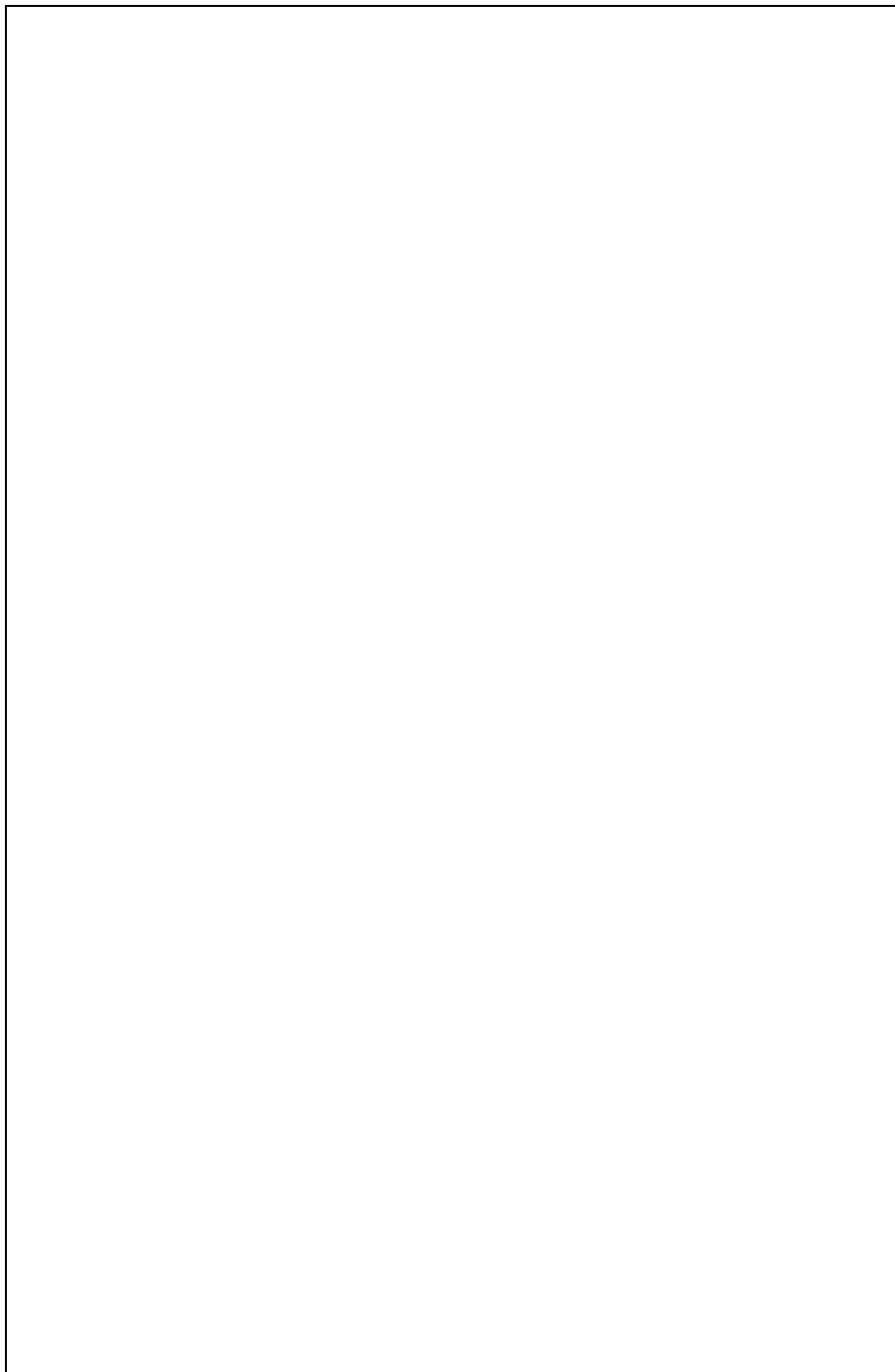
Academia Cesar Vallejo (2013) Libro de Problemas (2ª edición). Perú: Lumbreras.

Huerta Flores , J. y Reyes Rodriguez, J. (2006) Operación (1ª edición). Perú: Frama.

National Geographic (2011) Los secretos del número π (2ª edición). España: Editec.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3ª edición). Perú: Moshera.

Yáñez Díaz, J. y Yáñez Díaz, J. (2015) Razonamiento Matemático Teorico Práctico (1ª edición). Perú: Aplicación Gráfica S.R.L.



**SEMANA 3****OBJETIVOS**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Discriminar conceptos sobre las reglas descubiertas en los operadores convencionales.
2. Inferir situaciones problemáticas empleando las reglas de correspondencia de los operadores matemáticos
3. Resolver situaciones problemáticas sobre operaciones no convencionales aplicando la respectiva ley de formación y las estrategias metodológicas propuestas en clase.

**NUEVAS OPERACIONES**

Recordemos que definimos operación como:

...una función que tiene una regla o un procedimiento mediante el cual uno o más objetos de un conjunto, llamados operandos, son transformados en otro objeto del mismo conjunto...

Analiza las situaciones operativas siguientes:

No es lo mismo simplificar la expresión U, N o T que se detallan a continuación:

$$U = \frac{2 + 3 \times 4^2}{(2 + 3) \times 4^2}$$

$$N = \frac{2 + 3 \times 4^2}{(2 \blacksquare 3) \Delta 4^2}$$

$$T = \frac{2 \blacksquare (3 \Delta 4^2)}{(2 \blacksquare 3) \Delta 4^2}$$

Solo en el primer caso podemos operar porque son operaciones convencionales y resulta que:

$$U = \frac{2 + 3 \times 4^2}{(2 + 3) \times 4^2} = \frac{5}{8}$$

En las otras expresiones se requiere conocer el significado de $\blacksquare$ y Δ para efectuar alguna operación, en caso contrario sería imposible.

En cambio si asumiéramos las definiciones:

$$a \blacksquare b = a - 2b + 1 \quad \text{y} \quad a \Delta b = a + 2b - 1$$

Entonces tendríamos las siguientes respuestas:

$$N = \frac{2 + 3 \times 4^2}{(2 \blacksquare 3) \Delta 4^2} = \frac{2 + 3 \times 16}{(-3) \Delta 16}$$

$$N = \frac{2 + 3 \times 4^2}{(2 \blacksquare 3) \Delta 4^2} = \frac{50}{28} = \frac{25}{14}$$

$$T = \frac{2 \blacksquare (3 \Delta 4^2)}{(2 \blacksquare 3) \Delta 4^2} = \frac{2 \blacksquare 34}{(-3) \Delta 16}$$

$$T = \frac{2 \blacksquare (3 \Delta 4^2)}{(2 \blacksquare 3) \Delta 4^2} = \frac{-65}{28} = -\frac{65}{28}$$

Este es un reto que resolveremos juntos al finalizar el estudio del presente capítulo.



1.- CONCEPTO

Cada operación sea convencional o no convencional tiene un símbolo denominado **operador matemático**, presenta una **definición** y se aplica a elementos o **componentes** que ingresan a la operación.

Para el caso de las operaciones no convencionales generalmente la definición está en base a operaciones convencionales.

Veamos ahora como es el procedimiento que transforma uno o más números en otro número.

Analiza la siguiente situación problemática

Sabiendo que:

$$a\nabla c = 2a - 3c + c^a$$

Entonces ¿Cuál será el valor de $(2\nabla 4) + (2\nabla 2)$?

El primer lugar precisemos que ∇ es el operador matemático y la expresión:

$$2a - 3c + c^a$$

es la definición y los elementos que están ingresando para ser transformados son: 2 y 4.

Entonces se observa claramente que debemos **reemplazar** los elementos según la definición.

Es decir:

$$2\nabla 4 = 2() - 3() + ()^{()}$$

$$2\nabla 4 = () - () + ()$$

$$2\nabla 4 = 8$$

$$2\nabla 2 = 2() - 3() + ()^{()}$$

$$2\nabla 2 = () - () + ()$$

$$2\nabla 2 = 2$$

Finalmente:

$$(2\nabla 4) + (2\nabla 2) = 10$$





2.- CLASIFICACIÓN POR EL NÚMERO DE COMPONENTES

2.1 OPERADOR SIMPLE

Aquella operación no convencional que presenta solo un operador matemático.

Ejemplo ilustrativo 1

✎ Se sabe que : $\boxed{m} = m^2 + 1$

Calcular el valor de $\boxed{1}$

Respuesta: 2

✎ Se define en $\mathbb{R}$ la siguiente operación:

$$a^3 \rightsquigarrow \sqrt{b} = 2a + 3b$$

Hallar el valor de $(\sqrt{8 \rightsquigarrow 8} - 6) \rightsquigarrow 4$

Respuesta: 52

2.2 OPERADOR COMPUESTO:

La operación no convencional que presenta dos o más operadores matemáticos.

Se observa que siempre una definición está dentro de la otra definición y por lo tanto esta debe ser despejada usando la técnica operativa apropiada.

Ejemplo ilustrativo 2

✎ Conociendo que:

$$\begin{cases} a * b = 3a - b + 1 \\ (m \nabla n) * m = 5m - 9n + 4 \end{cases}$$

Hallar el valor de

$$((101 * 1)^2 - (152 \nabla 1)^2) \nabla 400$$

Respuesta: 11

✎ Sabiendo las definiciones:

$$\boxed{n} = 3n - 5 \quad y \quad \boxed{f(x)} = 6x + 7$$

Hallar el valor de $\boxed{2} + \boxed{f_{(2)}}$

Respuesta: 53

**3. CLASIFICACIÓN POR SU ESTRUCTURA****3.1. OPERADOR CONDICIONAL**

Cuando en su definición se presenta dos o más subdefiniciones, que dependen del valor de la componente o componentes.

Ejemplo ilustrativo 3:

 Se define la operación:

$$\boxed{x} = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & ; \text{ si } x \text{ es impar } x \neq 1 \\ \frac{x+2}{x-2} & ; \text{ si } x \text{ es par } x \neq 2 \end{cases}$$

Luego calcular el valor de: $\boxed{\boxed{4} + \boxed{4}} + \frac{7}{2}$

Respuesta: $\frac{3}{2}$

3.2. OPERADOR CON DEFINICIÓN INDIRECTA

Es aquella operación que está definida sobre si misma y por lo tanto también debe despejarse la definición.

Ejemplo ilustrativo 4

 Sabiendo que:

$$a \% b = 2(b \% a) - a$$

Entonces hallar el valor de

$$(3 \% 6) - (6 \% 3)$$

Respuesta: 1

 Conociendo la definición en $\mathbb{R}$:

$$a \& b = \sqrt{a(b \& a)}$$

Luego hallar $16 \& 2$

Respuesta: 8

**3.3. OPERADOR CON CUADRO DE DOBLE ENTRADA:**

Es la representación de una operación binaria y por lo tanto siempre presentará dos componentes en su estructura, donde los números ubicados al inicio de cada fila corresponden a la primera componente y los números ubicados al inicio de cada columna corresponden a la segunda componente. En algunos casos se debe trabajar con los datos del cuadro y en otros casos debes descubrir su definición.

ESTO ES UN RETO (CEPUNT DE MAYO 2016)

Se define en $\mathbb{N}$ una operación representada por @, mediante la tabla adjunta.

Calcular la suma de las cifras del resultado final de:

$$[(2@4)@(4@2)] + [(2@8)@(8@2)]$$

@	2	4	6	8
2	6	8	10	12
4	18	20	22	24
6	38	40	42	44
8	66	68	70	72

Respuesta: 13

4. OPERACIÓN BINARIA

Si clasificamos las operaciones según la cantidad de componentes entonces tendremos:

- Unaria.- Cuando tienen una sola componente.

Ejemplo.- $\boxed{n^2} = n + 1$

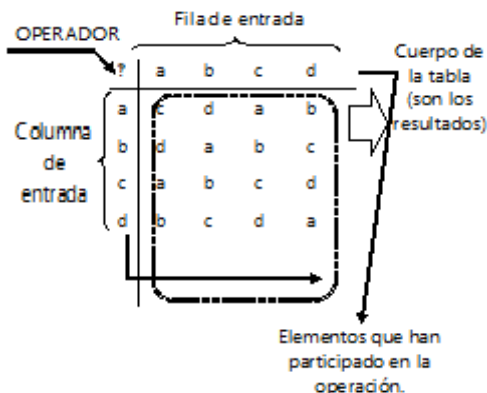
- Binaria.- Cuando tienen dos componentes. Aquí se incluyen las siete operaciones fundamentales.

Ejemplo.- $a\Delta b^2 = a + b$

- Ternaria.- Cuando tienen tres componentes.

Ejemplo.- $a\Delta b^2\Delta c^3 = 2a + \log_c(2b - 1) + 3$

Centraremos nuestro estudio en la segunda clasificación por que cumplen con algunas propiedades y posee algunos elementos notables.



4.1 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LA OPERACIÓN BINARIA

A) DE CLAUSURA O CERRADURA

Cuando al operar dos elementos cualesquiera del conjunto numérico elegido, el resultado pertenece a ese mismo conjunto y entonces diremos que la operación es cerrada para ese conjunto en particular.

En forma práctica si halláramos por lo menos un par de elementos que operados no sea del conjunto entonces diremos que la operación no es cerrada.

Por ejemplo la adición es cerrada para los números enteros ($\mathbb{Z}$), pues la suma de dos números enteros siempre es otro número entero.

Asimismo la sustracción no es cerrada en los números naturales ($\mathbb{N}$), pues la diferencia:

$$7 - 10 = -3$$

no tiene como resultado un número natural.

B) CONMUTATIVIDAD

Conmutar significa intercambio de posiciones, por tanto el orden como se ubiquen las componentes no afecta el resultado.

Entonces para dos componentes cualesquiera que se operen, el conmutarlos no varía el resultado.

$$\forall a, b \in A : a \Delta b = b \Delta a$$



No olvides que basta operar con un par de componentes que no cumplen y se puede concluir que la operación no es conmutativa para dicho conjunto.

4.2 ELEMENTOS NOTABLES

A) ELEMENTO NEUTRO (e)

En la adición el neutro es cero (0) pues:

$$a + 0 = a \quad y \quad 0 + a = a$$

Asimismo en la multiplicación en uno (1) pues:

$$a \times 1 = a \quad y \quad 1 \times a = a$$

Generalizando diremos que:

$\exists! e \in A$, denominado neutro si cumple:

$$a * e = a \quad y \quad e * a = a$$

Ejemplo ilustrativo 5

De la operación @ definida mediante:

$$a @ b = a + b - 23$$

Se sabe que “e” es el neutro y que el inverso de a es a^{-1} entonces hallar el valor de:

$$T = [(4 @ 12^{-1})^{-1} @ e^{-1}] @ 23^{-1}$$

elemento “e” que pertenece al conjunto A, denominado neutro, tal que cumple con tal condición.

B) ELEMENTO INVERSO (a^{-1})

En la adición en inverso aditivo está definido $a^{-1} = -a$ porque:

$$a + (-a) = 0 \quad y \quad (-a) + a = 0$$

Asimismo en la multiplicación el inverso multiplicativo está definido como $a^{-1} = \frac{1}{a}$, porque:

$$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad y \quad \frac{1}{a} \times a = 1$$

Generalizando diremos que: para cada elemento a del conjunto A existe un único elemento denominado a^{-1} , tal que operados resulta el neutro, es decir:

$$a * a^{-1} = e \quad y \quad a^{-1} * a = e$$



Cabe precisar que cuando en los estudios secundarios nos precisan que $a^{-1} = \frac{1}{a}$ se refieren al inverso multiplicativo. Por tanto en adelante puede ocurrir que:

$$3^{-1} = \frac{2}{5} \quad o \quad 5^{-1} = \frac{1}{125}$$

Que debes interpretarlo como una operación que no es ni la adición ni la multiplicación.

Finalmente es importante mencionar que cuando:

1°) se verifica la existencia del neutro y del inverso es porque la operación es conmutativa.

2°) te pidan hallar los inversos, debes antes hallar el neutro.

Ejemplo ilustrativo 6

El operador @ se define así: $m @ n = 2\sqrt{mn} - \frac{m}{2}$

hallar el valor de: $2^8 @ 2^{10}$

- A) 2^8 B) 2^9 C) 2^{10} D) 2^{11} E) 2^{12}

RESOLUCION:

$$2^8 @ 2^{10} = 2\sqrt{2^8 \cdot 2^{10}} - \frac{2^{10}}{2} = 2\sqrt{2^{18}} - 2^9 = 2 \times 2^9 - 2^9 = 2^9$$

CLAVE “B”

Ejemplo ilustrativo 7

Asumiendo que: $m \Delta n = m^2 - 3n$ y $m * n = 2m^2 - n$

Ademas:

$$\frac{m}{n} = n - m$$

$$\frac{3 \Delta 2}{4 * 3}$$

Calcular:

- A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

**RESOLUCION:**

$$3\Delta 2 = (3)^2 - 3(2) = 3$$

$$4 * 3 = 2(4)^2 - 3 = 29$$

luego:

$$\left(\frac{3\Delta 2}{4 * 3} \right) = \left(\frac{3}{29} \right)$$

Finalmente resulta: $29 - 3 = 26$

CLAVE "D"

Ejercicios Resueltos



1.- Si se sabe que: $a \# b = a^b + \sqrt{b^a}$, Calcular $2^{2\#4} \div 2^{4\#2}$

A) 1

B) 2

C) 4

D) 8

E) 32

RESOLUCIÓN:

$$2\#4 = 2^4 + \sqrt{4^2}$$

$$= 16 + 4$$

$$= 20$$

$$4\#2 = 4^2 + \sqrt{2^4}$$

$$= 16 + 4$$

$$= 20$$

$$\text{luego: } 2^{2\#4} \div 2^{4\#2} = 2^{20} \div 2^{20} = 1$$

CLAVE "A"

2.- Sea Δ , el operador que se define mediante:

$$m\Delta n = \log_m n - \frac{m}{n} \sqrt{m^n}$$

Al calcular, $8 \Delta 2$, resulta:

A) $\frac{95}{3}$

B) $-\frac{41}{3}$

C) $\frac{92}{3}$

D) $-\frac{92}{3}$

E) $-\frac{95}{3}$

**RESOLUCION:**

$$8\Delta 2 = \log_8 2 - \frac{8}{2} \sqrt{8^2} = \log_{2^3} 2^1 - 4\sqrt{64}$$

$$= \frac{1}{3} - 32 = -95\frac{1}{3}$$

CLAVE “E”

3.- El operador $a \# b$ se define como la parte entera de $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{3}$ y el operador $a \square b$ se define como el entero inmediato superior de $\frac{ab+a}{3}$.
Luego el valor de:

$(3 \# 2) \div (2 \square 3)$, es:

A) $\frac{3}{8}$

B) $-\frac{25}{3}$

C) $\frac{5}{3}$

D) $\frac{8}{3}$

E) $\frac{25}{3}$

RESOLUCION:

Para: $3 \# 2 \rightarrow \frac{(3+2)^2(3-2)^2}{3} = \frac{25}{3} = 8,3$

luego: $3 \# 2 = 8$

para: $2 \square 3 \rightarrow \frac{(2)(3)+2}{3} = \frac{8}{3} = 2,3$

luego: $2 \square 3 = 3$

Finalmente: $(3 \# 2) \div (2 \square 3) = 8 \div 3$
 $= \frac{8}{3}$

CLAVE “D”



4.- Si

$$\begin{array}{c} \textcircled{3c} \\ \triangle \\ 2b \end{array} = a^{4b} + c^{3a}$$

$\boxed{a}$ $\begin{array}{c} \textcircled{12} \\ \triangle \\ 6 \end{array}$

Entonces el valor de:

 $\boxed{4}$

es:

- A)
- 2^{12}
- B)
- 2^{24}
- C)
- 2^{25}
- D)
- 2^{27}
- E)
- 2^{36}

RESOLUCIÓN:

Para nuestro caso:

$\boxed{a = 4}$

y

$2b = 6$

y

$3c = 12$

Entonces:

$\boxed{b = 3}$

$\boxed{c = 4}$

$$\begin{array}{c} \textcircled{12} \\ \triangle \\ 6 \end{array}$$

$\boxed{4}$

$$= 4^{4(3)} + 4^{3(4)} = 4^{12} + 4^{12}$$

$$= 2(4)^{12} = 2(2^2)^{12} = 2^{25}$$

CLAVE "C"

5.- Asumiendo que:

$$\left(\frac{4a}{5} - 3 \right) = \frac{4}{9}a + 2$$

Entonces el valor de:

$$\left(\textcircled{78} + 679 \right)$$

es:

- A) 401 B) 403 C) 405 D) 407 E) 409

RESOLUCION:



1º) Haciendo cambio de variable.

$$\frac{4a}{5} - 3 = A \Rightarrow a = \frac{5A + 15}{4}$$

Luego el operador queda así:

$$\begin{aligned} \textcircled{A} &= \frac{4}{9} \left(\frac{5A + 15}{4} \right) + 2 = \left(\frac{5A + 15}{9} \right) + 2 \\ &= \frac{5}{9} (A + 3) + 2 \end{aligned}$$

2º) Finalmente:

$$\textcircled{78} = \frac{5}{9} (78 + 3) + 2 = 47$$

luego:

$$\textcircled{47 + 679} = 407$$

CLAVE “D”

6.- En el siguiente cuadro, el valor de: $20 * 17$, es:

*	1	2	3	4
1	3	2	1	0
2	7	6	5	4
3	11	10	9	8
4	15	14	13	12

A) 65

B) 35

C) 53

D) 60

E) 63

RESOLUCION:

El conjunto de partida es:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Los valores que se deben hallar ($20 * 7$), no se encuentran en el cuadro; entonces debemos hallar la operación o “fórmula” que define el operador.

Tomando como ayuda:

- De arriba hacia abajo los números de cada columna forman una sucesión lineal de razón: 4



- De izquierda a derecha los números de cada fila forman una sucesión lineal de razón: -1

$$a * b = 4a - 1b$$

Comprobamos que sea correcta esta operación para cualquier valor de la tabla.

Ejemplo:

$$2 * 3 = 4(2) - 1(3) = 5$$

$$4 * 1 = 4(4) - 1(1) = 15$$

$$1 * 2 = 4(1) - 1(2) = 2$$

$$\Rightarrow 20 * 17 = 4(20) - 1(17) = 63$$

CLAVE "E"

7.- Se tiene la tabla:

θ	1	2
1	5	8
2	11	14

Definida por el operador θ de forma: $a \theta b = Ma^2 + Nb$

Calcular: $3 \theta 4$

A) 25

B) 45

C) 53

D) 30

E) 55

RESOLUCION:

Para calcular $3 \theta 4$, reemplazamos en la regla de definición, pero según la regla de definición, $a \theta b = Ma^2 + Nb$, no conocemos los valores de M y N, entonces evaluamos:

- De la tabla y de la regla de definición:

1) $1 \theta 1 = m(1)^2 + N(1)$

$$5 = M + N \dots\dots\dots (I)$$

2) $2 \theta 1 = M(2) + N(1)$

$$11 = 4M + N \dots\dots\dots (II)$$

De (II) - (I): $6 = 3M$, $M = 2$, luego $N = 3$.

- Ahora la regla de definición será: $a \theta b = 2a^2 + 3b$
- Calculando $3 * 4 = 2(3)^2 + 3(4)$
 $3 * 4 = 30$

CLAVE "D"

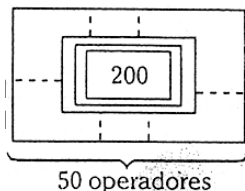
**Ejercicios Propuestos**

1. Se define:

$$\boxed{x+3} = x-3$$

El valor del operador es.

- A) - 100
D) - 50



- C) 50

2. Se define la operación

 $\updownarrow$ en IR:

$\updownarrow$	1	2	3	4	5
1	3	4	5	6	7
2	4	5	6	7	8
3	5	6	7	8	9
4	6	7	8	9	10
5	7	8	9	10	11

Indicar el valor de verdad de:

I. $(2 \updownarrow 3) \updownarrow 3 = (x \updownarrow 2) \updownarrow 5 \leftrightarrow x = 1$

II: Es conmutativa

III. No tiene elemento neutro

IV. La operación es cerrada.

- A) FVVV
D) VVFV

- B) VFFF
E) VVVV

- C) FVFV

3. Si: $M \Leftrightarrow N = \frac{6}{M} + \frac{4}{N} + 2$

El valor de "x" en $x \Leftrightarrow 2 = 2 \Leftrightarrow 4$ es:

- A) 1
D) 0

- B) 2
E) 3

- C) 4



4. Si: $\boxed{x+1} = 2x - 1$

El resultado de: $E = \boxed{4} + \boxed{6}$ es:

A) 20

B) 25

C) 24

D) 16

E) 26

5. Sabiendo que: $\bigcirc x = x^2 - 1$

$\bigcirc \boxed{x} = x(x+2)$

Al efectuar $\boxed{3} + \bigcirc 2$ resulta:

A) 7

B) 6

C) 5

D) 4

E) 9

6. Se define:

$\boxed{m+5} = \sqrt{m\sqrt{m\sqrt{m\sqrt{m\sqrt{\dots}}}}}$

Halla:

$\boxed{\boxed{\boxed{20 + 1 + 2 + 3 \dots + 19}}}$

A) 90

B) 100

C) 110

D) 120

E) 150

7. Si: $\boxed{n} = n \times \boxed{n-1}$

Al resolver:

$A = \frac{\boxed{\boxed{\boxed{n}}}}{\boxed{\boxed{n}} - 1 \quad \boxed{n} - 1 \quad n - 1}$



El valor de A es:

A) $\frac{1}{n}$

B) n

C) 1

D) n^2

E) $n!$

8. Se define $\bigcirc x + 5 = \bigcirc x + 2 + 2$.

Si además $\bigcirc 12 = 20$, entonces,

el valor de $\bigcirc 300$ es:

A) 212

B) 215

C) 224

D) 216

E) 214

9. El operador " $\oplus$ " se define como:

$$m \oplus n = \frac{3mn}{2}$$

Si a^{-1} es el elemento inverso de "a" entonces el valor reducido de $5 \oplus 2^{-1}$, es:

A) $5/3$

B) $3/5$

C) 8

D) 10

E) $5/2$

10. En el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ se define la operación $*$ así:

*	1	2	3	4	5
1	3	4	5	1	2
2	4	5	1	2	3
3	5	1	2	3	4
4	1	2	3	4	5
5	2	3	4	5	1

Si a^{-1} es el elemento inverso de a, entonces, el valor de $K = [(3^{-1} * 5^{-1})^{-1} * 2^{-1}]^{-1} * 4^{-1}$ es:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5



11. Se define las operaciones:

$$\textcircled{x} = x^2 - 9$$

$$\triangle x = x(x+6)$$

Según esto el valor de: $\triangle 2 + \triangle 3$ es:

- A) 10
D) 1

- B) 14
E) 16

C) 8

12. Si: $\boxed{a+b} \boxed{a-b} = a^2 + b^2$

El resultado de $\boxed{\sqrt{3}} \boxed{\sqrt{5}}$ es:

- A) 4
D) 1

- B) 2
E) 6

C) 8

13. Si se sabe que : $\boxed{x} = ax + b$; $a > 0$;

$$\boxed{\boxed{\boxed{x}}} = 16 \boxed{x} + 35 \quad \wedge$$

$$\textcircled{\boxed{2x}} = 24x + 12, \text{ el valor de } \boxed{\textcircled{5}} \text{ es:}$$

- A) 31
D) 42

- B) 36
E) 12

C) 27



14. Si se cumple que:

$$x^{(x\Delta y)} = y^{(y-x)}, \quad \forall x, y; \quad x \neq y$$

$$\text{Entonces el valor de } R = \frac{(5\Delta 2)(2\Delta 5)}{(100\Delta 99)(99\Delta 100)}$$

A) 9
D) 6

B) -9
E) 15

C) -6

15. Sabiendo que:

$$x\Delta y = \frac{x^2 y - 3xy}{18y} \quad \forall y \neq 0$$

Entonces el valor de $E = 9\Delta\{9\Delta[9\Delta(\dots)]\}$ es:

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 9

16. Usando las definiciones:

$$(2m)\Delta \frac{(mn)}{9} = \frac{3(n\# m)}{m-6n} \quad x^x \# y^y = 2x^2 - y \quad \text{Entonces el valor de } E =$$

$$54\Delta 12 - 2^8 \# 3^{81} \text{ es:}$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 5

E) 15

17. Usando la definición: $a\sqrt{(b*a^2)} = (a*b^2)$

donde: $m^2 * n^2 > 0$ y $m > 0; n > 0$

Entonces el valor de $E = 2*4 + 9*3$

es:

A) 27

B) 28

C) 30

D) 31

E) 33



18. Se define la operación # en IR mediante

$$a \# b = a \sqrt{\frac{2b^3}{b \# a}} ; \quad a \# b > 0$$

Entonces el valor de $32 \# 8 - 4 \# 1$ es:

- A) $66\sqrt[3]{2}$ B) 62 C) $33\sqrt[3]{2}$
D) $62\sqrt[3]{2}$ E) 66

19. Se define: $a \# b \sqrt[a \# b]{a * b} = a - b$

Además: $3 * 1 = 2$; $7 * 4 = 81$; $9 * 5 = 1024$

El valor de $M = [(2 * 5) + (8 * 9) - (5 * 6)] \# 100$ es:

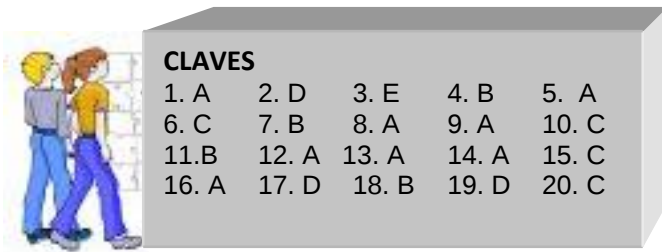
- A) 90 B) 95 C) 97
D) 100 E) 101

20. Si: $c * b * a = \sqrt{\frac{a * b * c}{b}}$

Calcular el mínimo valor de:

$$(a^{-1} * b^{-2} * c^{-3})^2 + (c * b^2 * a^3)^2$$

- A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) - 2



REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

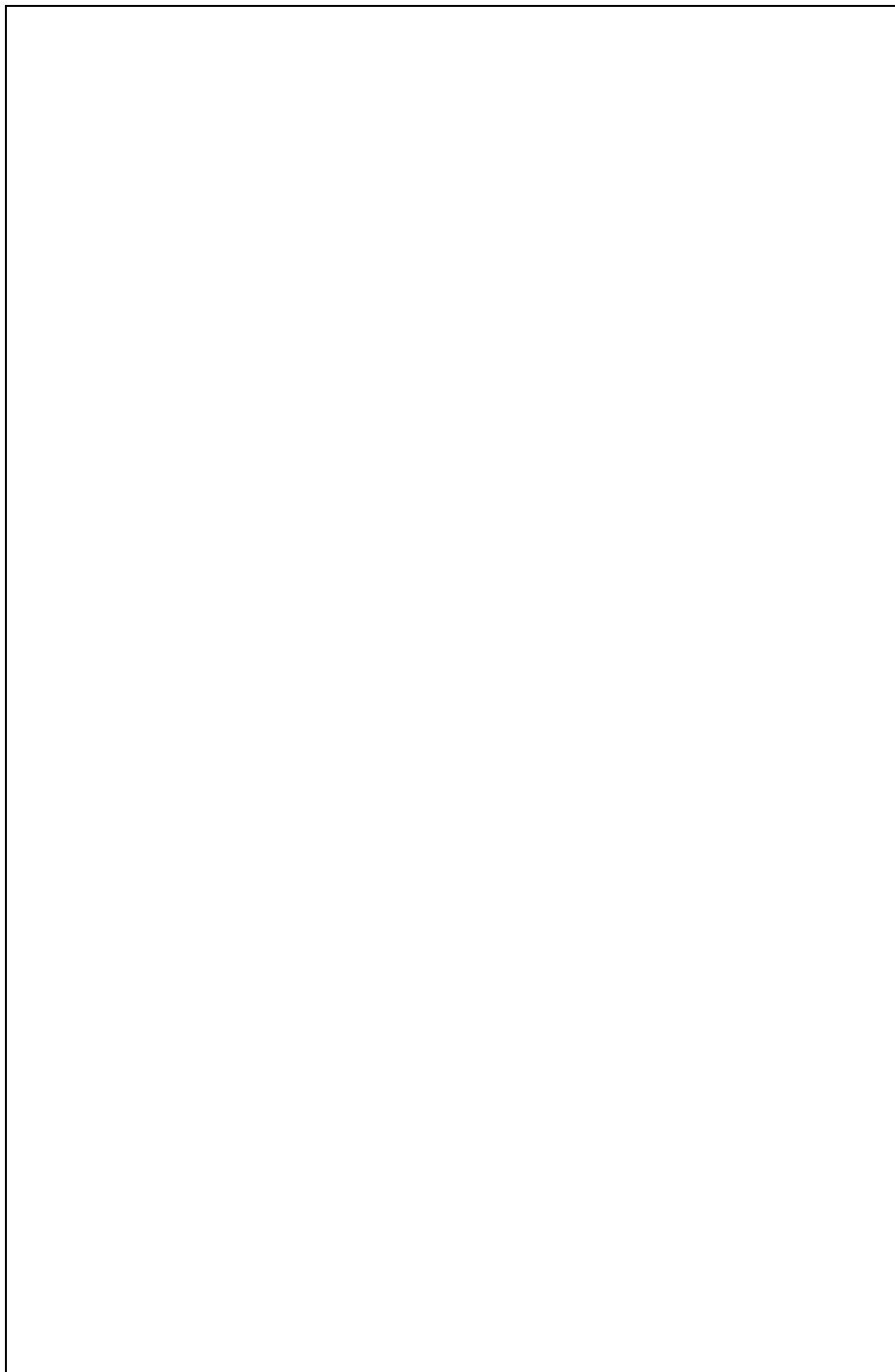
Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Huerta Flores , J. y Reyes Rodriguez, J. (2006) Operación (1ª edición). Perú: Frama.

Lumbreras, C. y Pavletich, S. (2005) El sistema de los números reales (1ª edición). Perú: Moshera.

Pozo Montero, F. , Parés Mariné, N. y Vidal Seguí, Y. (2015) Matemáticas para la ingeniería (2ª edición). España: Pearson Educación.

Yáñez Díaz, J. y Yáñez Díaz, J. (2015) Razonamiento Matemático Teorico Práctico (1ª edición). Perú: Aplicación Gráfica S.R.L.



**SEMANA 4****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Calcular el término enésimo de una sucesión numérica a partir de su ley de formación.
2. Dado una sucesión numérica hallar su ley de formación.
3. Resolver situaciones problemáticas aplicando la definición y propiedades de sucesiones.



ORDEN EN LOS NÚMEROS

En muchas ocasiones los conjuntos de elementos SE ORDENAN de igual manera que están ordenados los números naturales.

Siempre que los elementos de un conjunto se ponen en correspondencia con los números naturales $1, 2, 3, \dots$, de forma que a cada elemento le asignamos un número natural correspondiente, el conjunto se convierte en una SUCESIÓN.

Un conjunto finito puede ser mostrado entre llaves y precisando sus elementos separados por comas. Ahora cuando el conjunto es infinito se debe actuar con cautela pues la simple mención de los primeros



elementos no garantiza un tipo específico de conjunto numérico, salvo que tengamos la seguridad plena del conjunto.

Entonces cuando el conjunto es infinito es recomendable utilizar alguna propiedad que posea cada uno de los elementos.

Por ejemplo el conjunto infinito $M = \{1, 2, 3, \dots\}$ se puede precisar que es de los primeros números naturales pero también se puede concluir que tiene los mismos tres primeros elementos del conjunto:

$$T = \left\{ \frac{n}{n + (n-1)(n-2)(n-3)} ; n \in \mathbb{N} \right\}$$

A pesar que M representa los números naturales:

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Al describir por extensión el conjunto T resulta que:

$$T = \{1, 2, 3, 10, 29, 66, \dots\}$$

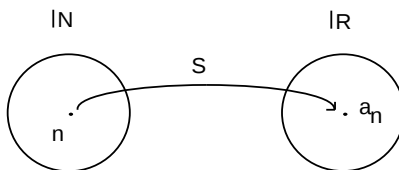
Entonces una de las formas de asegurar la pertenencia o no de un número a una sucesión es establecer una expresión que vincule el lugar y el término que ocupa dicho lugar. Esta expresión en adelante la denominaremos ley de formación.

Esta sesión se ocupará de analizar los términos de una sucesión utilizando diversos procedimientos aritméticos para determinar su ley de formación, la cual permitirá resolver diversos problemas.

**1.- SUCESIÓN**

La expresión S es una función real de variable entera positiva y simbólicamente se tiene que:

$$S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$1 \longrightarrow a_1$$

$$2 \longrightarrow a_2$$

$$3 \longrightarrow a_3$$

$$4 \longrightarrow a_4$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$n \longrightarrow a_n$$

Terminos de la sucesión : $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$

Son ejemplos de sucesiones:

$$S_1 : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49$$

$$S_2 : 1; -x; \frac{x^2}{2}; -\frac{x^3}{3}; \frac{x^4}{4}; -\frac{x^5}{5}; \frac{x^6}{6}$$

Cuando el número de términos es dado, se dice que la sucesión es limitada o finita. Cuando el número de términos es ilimitado, la sucesión es infinita.

El término general o término enésimo es una expresión que indica la ley de formación de los términos de la sucesión.

Ejemplo.- El término general de la sucesión:

$$S_3 : 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49 \quad , \quad \text{es } n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



1.1 SUCESIÓN NUMÉRICA

Es un conjunto ordenado de números de acuerdo a una ley general o fórmula de recurrencia que se puede determinar relacionando las operaciones básicas.

Para la sucesión:

4; 6; 8; 10; ... ; t_n ; se puede establecer que: $t_n = 2n + 2$

1.2. RAZÓN DE UNA SUCESIÓN

Es aquella que se obtiene al comparar dos términos consecutivos de una sucesión.

De acuerdo a la razón las sucesiones pueden ser:

a) **SUCESIÓN ARITMÉTICA**

Se dice que una sucesión numérica es aritmética (progresión aritmética) cuando la diferencia entre cada par de términos consecutivos es constante. Así:

Ejemplo:

$S \rightarrow 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; \dots$

$$t_{n+1} - t_n = r$$

Para obtener el n -ésimo término de una *sucesión aritmética* se emplea la fórmula:

$$t_n = t_1 + r(n - 1)$$

Donde: t ... ino, t_1 es el primer término, r es la razón aritmética y n es el número de términos.

b) **INTERPOLACIÓN DE MEDIOS ARITMÉTICOS**

Interpolar “ m ” medios aritméticos o diferenciales entre dos números dados, implica formar una progresión aritmética cuyos extremos sean previamente los números dados.

Para tal efecto bastará conocer la razón usando la formula:

$$r = \frac{t_n - t_1}{n - 1}$$

Ejemplo: Interpolar 3 medios diferenciales entre cada dos términos consecutivos de la progresión:

$\div 2, 14, 26, 38$

**RESOLUCIÓN:**

Entre 2 y 14

$$r = \frac{(a_n - a_1)}{n - 1} = \frac{14 - 2}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

Luego obtenemos :

$$\div 2 \cdot \underbrace{5 \cdot 8 \cdot 11}_{m.a} \cdot 14$$

$$\div 14 \cdot \underbrace{17 \cdot 20 \cdot 23}_{m.a} \cdot 26$$

$$\div 26 \cdot \underbrace{29 \cdot 32 \cdot 35}_{m.a} \cdot 38$$

c) SUCESIÓN GEOMÉTRICA

Se dice que una sucesión numérica es geométrica (progresión geométrica) cuando el cociente de cada par de términos consecutivos es constante. Así:

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = r$$

Donde r es constante

Son ejemplos de sucesiones geométricas:

$$1; 3; 9; 27; \dots$$

$$-4; -8; -16; \dots$$

$$t, tr, tr^2, tr^3, \dots$$

Para obtener el enésimo término de una *progresión geométrica* se emplea la fórmula:

$$t_n = t_1 r^{n-1}$$

Donde: t_n es el n-ésimo término t_1 es el primer término, r es la razón geométrica. n es el número de términos.**d) INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS**

Interpolación “m” medios geométricos o proporcionales entre dos cantidades, implica colocar o incluir “m” números, de modo tal que al hacer este procedimiento, se forme una progresión geométrica que tenga por extremos a dichos números.

Ejemplo:

$$\div \div 3 : \underbrace{6 : 12 : 24 : 48}_{m.g.} : 96$$

Para realizar la interpolación, bastará aplicar la fórmula



$$q = \sqrt[m+1]{\frac{t_n}{t_1}} = \sqrt[m-1]{\frac{t_n}{t_1}}$$

donde :

m = términos que se interpolan

n = número de términos de la P.G.

2. SUCESIONES POLINOMIALES

Son aquellas sucesiones cuyas fórmulas generales que los representan son polinomios.

Según el grado del polinomio las sucesiones pueden ser lineales, cuadráticas, cúbicas, etc.

2.1 SUCESIONES LINEALES:

Son aquellos cuya fórmula general es un polinomio lineal en **n** es decir tiene la fórmula:

$$t_n = an + b$$

Por ejemplo, si

$t_n = 3n + 2$, su respectiva sucesión es:

5 ; 8 ; 11 ; 14 ; ...

2.2 SUCESIONES CUADRÁTICAS

Son aquellas sucesiones cuya fórmula general es un polinomio de segundo grado, es decir tiene la forma:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

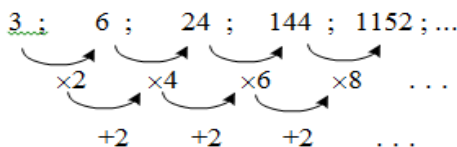
Donde $n \in \mathbb{Z}^+$; a, b, y c son constantes.

Por ejemplo si $t_n = n^2 + 2n - 1$, su respectiva sucesión es: 2 ; 7 ; 14 ; 23 ; 34 .

Es posible encontrar otros tipos de sucesiones que resultan combinando las fórmulas de recurrencia, por ejemplo:

- ✓ *Mixtas*. Es una combinación de progresión aritmética y geométrica.

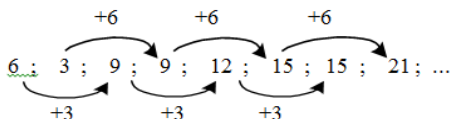
Ejemplo:





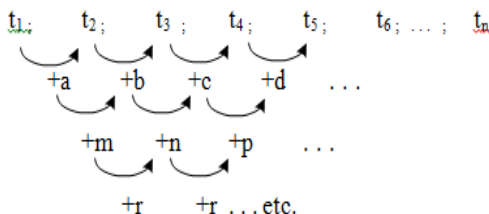
- ✓ **Alternadas.** Cuando se establece una razón común al establecer una comparación alternada.

Ejemplo:



2.3 FÓRMULA DE RECURRENCIA PARA SUCESIONES POLINOMIALES (MÉTODO COMBINATORIO)

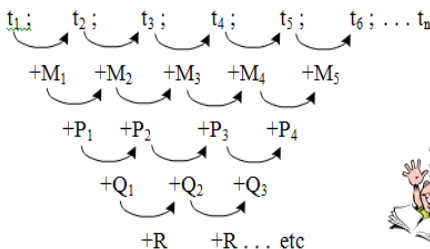
Dada la siguiente sucesión



Observamos que la razón constante se presenta en la tercera fila de razones por lo que es una sucesión polinomialde tercer orden, cuya fórmula de recurrencia está dada por la expresión:

$$t_n = t_1 C_0^{n-1} + a C_1^{n-1} + m C_2^{n-1} + r C_3^{n-1}$$

El método puede generalizarse para sucesiones polinómicas de mayor grado; así para la sucesión de cuarto grado (presenta cuatro filas de razones):



Su fórmula es:



$$t_n = t_1 C_0^{n-1} + M_1 C_1^{n-1} + P_1 C_2^{n-1} + Q_1 C_3^{n-1} + R C_4^{n-1}$$

En forma práctica se puede obtener el término enésimo con la siguiente fórmula:

$$t_n = t_1 + \frac{M_1(n-1)}{1!} + \frac{P_1(n-1)(n-2)}{2!} + \dots + \frac{R(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}$$

Ejemplo ilustrativo 1

El término de lugar 40 en la siguiente sucesión

8 ; 13 ; 18 ; 23 ; es:

A) 203

B) 205

C) 207

D) 204

E) 206

RESOLUCIÓN:

$$\begin{array}{ccccccc} T_0 & T_1 & T_2 & T_3 & \dots\dots\dots & T_n \\ 3 & 8 & 13 & 18 & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & & \\ +5 & +5 & +5 & \Rightarrow & r=5 \end{array}$$

$$T_n = 3 + 5n$$

$$T_{(40)} = 3 + 5(40)$$

$$T_{(40)} = \boxed{203}$$

CLAVE “A”

Ejemplo ilustrativo 2

En la P.A. 4,.....5,.....47,.....159 el número de términos que hay entre 47 y 159 es triple del número de términos que hay entre 5 y 47. La razón de esta progresión es:

A) 4

B) 5

C) 6

D) 7

E) 8

RESOLUCIÓN:

Considerando la P.A. de razón r.



$$+.....5.....47.....159$$
$$n \qquad 3n$$

Del intervalo con extremos 5 y 47

$$r = \frac{47-5}{n+1} = \frac{42}{n+1} \dots\dots\dots (1)$$

Del intervalo con extremos 47 y 159

$$r = \frac{159-47}{3n+1} = \frac{112}{3n+1} \dots\dots\dots (2)$$

Como se trata de la misma P.A.

(1) y (2) son iguales entonces:

$$\frac{42}{n+1} = \frac{112}{3n+1} \text{ De donde:}$$

$n = 5$; sustituir en (1)

$$r = \frac{42}{5-1} = 7 \Rightarrow r = \boxed{7}$$

CLAVE “D”

Ejemplo ilustrativo 3:

Si la suma de “n” términos es $n(5n-3)$. La razón de una P.A.es:

A) 17

B) 11

C) 13

D) 10

E) 12

RESOLUCIÓN:

Sea la P.A+ $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$

Donde: $S_n = n(5n-3)$ para todo n

$$\text{Si } n=1 \quad S_1 = T_1 = (1)(5-3) = 2$$

$$\text{Si } n=2 \quad S_2 = T_1 + T_2 = 2(10-3) = 14$$

Pero:

$$T_1 = 2 \text{ y } T_2 = 12$$

Luego la razón: $r = T_2 - r_1 = 10$

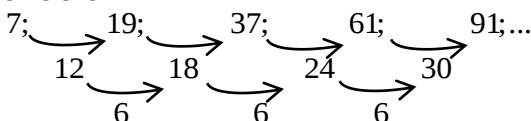
$$r = \boxed{10}$$

CLAVE “D”

**Ejercicios Resueltos**

- 1.- En la sucesión : 7 ; 19 ; 37 ; 61 ; 91; ... la diferencia entre el cuarto término de cuatro cifras y el penúltimo término de tres cifras es:

A) 570 B) 560 C) 535
D) 512 E) 505

RESOLUCIÓN:

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$t_n = 7 + 12C_1^{n-1} + 6C_2^{n-1} = 3n(n+1) + 1$$

$$t_n < 1000 \quad \text{entonces :} \quad 3n(n+1) + 1 < 1000 \quad \text{Luego :}$$

$$n_{\text{Máximo}} = 17. \quad \text{El penúltimo término es } t_{16}$$

$$t_{16} = 3 \times 16 \times 17 + 1 = 817 \quad \text{y el cuarto término de cuatro cifras es:}$$

$$t_{21} = 3 \times 21 \times 22 + 1 = 1387, \quad \text{entonces : } t_{21} - t_{16} = 570$$

CLAVE "A"

- 2.- Se tiene la progresión aritmética: a ; b ; c ; ... x que consta de 501 términos. Si la suma de los términos de lugares 135 y 387 es 1604 entonces el término de lugar 261 es:

A) 650 B) 802 C) 840
D) 880 E) 992

RESOLUCIÓN:

La posición de los términos dados equidistan, así:

$$t_{135}; \dots; t_{261}; \dots; t_{387} \quad \text{ya que: } 261 - 135 = 387 - 261 = 126$$

$$\text{Entonces : } t_{261} = \frac{t_{135} + t_{387}}{2} = \frac{1604}{2} = 802$$

CLAVE "B"



3.- Indicar el menor de cuatro términos de una progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de sus extremos es 560 y la suma de sus términos centrales es 240:

A) 20

B) 24

C) 28

D) 32

E) 36

RESOLUCION:

Sea la progresión geométrica $a; a.r; a.r^2, ar^3$

$$a + a.r^3 = 560 \text{ entonces : } a.(1+r)(1-r+r^2) = 560... (*)$$

$$a.r + ar^2 = 240 \text{ entonces } a.r.(1+r) = 240.....(**)$$

De (*) y (**) se obtiene $r = 3$ y reemplazando en (**) se determina el menor término de la progresión geométrica que es $a = 20$

CLAVE "A"

4.- En la siguiente sucesión : $0; 3/4; 8/9; 15/16; 24/25; p; q; r; \dots$

El producto pqr es:

A) 3024/3136

B) 13/14

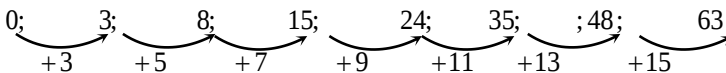
C) 15/16

D) 27/28

E) 29/30

RESOLUCION:

Los numeradores:



Los denominadores:

$4; 9; 16; 25; 36; 49; 64$
 $2^2 \quad 3^2 \quad 4^2 \quad 5^2 \quad 6^2 \quad 7^2 \quad 8^2$

Luego: $p = 35/36; q = 48/49; r = 63/64$

Entonces: $p.q.r = 15/16$

CLAVE "C"



- 5.- En la siguiente sucesión: $1/2$; $9/12$; $5/6$; $14/16$... Si :
 $a_n = 29/30$, entonces el valor de “n” es:

- A) 10
D) 14
B) 16
E) 15
C) 12

RESOLUCION

Como : $9/12 = 3/4$ y $14/16 = 7/8$, luego la sucesión será:

$$\underbrace{\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8} \dots}_{\text{Números pares}}$$

se deduce: $\frac{2n-1}{2n}$

$$\rightarrow a_n = \frac{2n-1}{2n} \quad \text{entonces: } \frac{29}{30} = \frac{2n-1}{2n} \Rightarrow n=15$$

CLAVE “E”

- 6.- La razón de una progresión aritmética cuyo primer término es la unidad y los términos de los lugares 3 , 11 y 41 forman una progresión geométrica, es:

- A) $11/3$
D) $11/10$
B) $11/41$
E) $10/11$
C) $3/11$

RESOLUCIÓN:

Progresión aritmética (PA)

$$t_3 = 1 + 2r$$

$$t_{11} = 1 + 10r$$

$$t_{41} = 1 + 40r$$

Progresión geométrica (PG): $(1+2r); (1+10r); (1+40r)$

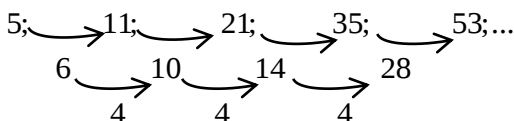
Para tres términos consecutivos de una progresión geométrica se cumple que:

$$(1+10r)^2 = (1+2r)(1+40r) \quad \text{de donde: } r=11/10$$

CLAVE “D”

- 7.- Se da la sucesión: 5; 11 ; 21 ; 35 , 53 ; ... de 21 términos. La cantidad de términos que terminan en cifra 5 es:

- A) 7
D) 10
B) 8
E) 11
C) 9

**RESOLUCION:**

$$t_n = 5 + 6C_1^{n-1} + 4C_2^{n-1} = 2n^2 + 3$$

Se sabe que $n \in \{1, 2, 3, \dots, 21\}$

$2n^2 + 3 = \dots 5$ entonces $2n^2 = \dots 2$ luego $n^2 = \dots 1$ o $n^2 = \dots 6$

Por tanto, $n \in \{1, 9, 11, 19, 21\}$ o $n \in \{4, 6, 14, 16\}$

obteniéndose 9 términos que cumplen con la condición.

CLAVE “C”

Ejercicios Propuestos



1. El término que sigue en la siguiente sucesión es:

$$(5)^3, (15)^6, (18)^{11}, (16)^{18}, (48)^{27}, (51)^{38}, \dots$$

- A) $(49)^{50}$ B) $(48)^{53}$ C) $(54)^{42}$
 D) $(48)^{46}$ E) $(49)^{51}$

2. El valor de $(a+b)$ de la siguiente sucesión es:

$$\frac{6}{12}, \frac{30}{6}, \frac{15}{3}, \frac{75}{12}, \frac{37.5}{17}, \frac{a}{b}$$

- A) 197 B) 198 C) 196
 D) 199 E) 194

3. Yanira camina cinco pasos hacia adelante y dos hacia atrás, luego da 10 hacia adelante y cuatro hacia atrás, y así sucesivamente, en P. A, entonces la cantidad de pasos que habrá dado Yanira en total hasta el momento en que por primera vez se encuentra a 1105 pasos del punto de partida, es:

- A) 2415 B) 2410 C) 2405
 D) 2400 E) 2395



4. Dada la siguiente sucesión:

2, 10, 30, 68, 130,

El número que sigue, es:

A) 220

B) 228

C) 222

D) 226

E) 226

5. Dada la siguiente sucesión:

1, 1, 3, 7, 111, el número de términos, es:

A) 9

B) 10

C) 15

D) 12

E) 13

6. En la siguiente sucesión:

$\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 5, 13, 30, \overline{ab}, \dots$

El valor de $\epsilon = \frac{a+b}{a-b}$, es:

A) 11

B) 10

C) 9

D) $\frac{9}{2}$

E) $\frac{7}{2}$

7. Dada la siguiente sucesión aritmética:

$\log_{\sqrt{a}} b, \log_b a, \log_a \sqrt{b}, \dots$, entonces el valor de $\log_b a$, es:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{94}{7}$

C) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

E) $\log 2$

8. El término siguiente en la sucesión mostrada:

$0, \frac{2}{3}; \frac{\log_2 27}{4}; \frac{8}{5}; \dots$ es:

A) $\frac{\log_2 3125}{6}$

B) $\frac{\log_2 625}{6}$

C) $\frac{\log_2 125}{6}$

D) $\frac{625}{6}$

E) $\frac{125}{6}$

9. Dada la siguiente sucesión:

1; 1; 5; 13; 25;; 841, el número de términos, es:

A) 22

B) 23

C) 24

D) 25

E) 26

10. Si en una P.G de 3 términos, la suma de ellos es 117, su producto 19 683 y la razón es mayor que 1, luego el segundo término es:

A) 24

B) 25

C) 26

D) 27

E) 28



11. Si la suma de “n” términos de una P.A. es $5n + 2n^2$, para todos los valores de “n”, luego el término del lugar 10 es :

- A) 41 B) 43 C) 4
D) 51 E) 42

12. Daniela se propone leer una novela diariamente; el primer día lee 4 páginas, el segundo día lee 7 páginas, el tercer día 12 páginas, el cuarto día 19 páginas y así sucesivamente hasta que cierto día se da cuenta que el número de páginas que ha leído ese día es 16 veces el número de días que ha estado leyendo, disminuido en 12. Luego el número de páginas leídas en dicho día, es:

- A) 224 B) 225 C) 226
D) 227 E) 228

13. La diferencia del denominador y numerador del vigésimo término de la sucesión. $\frac{3}{2}; \frac{9}{10}; \frac{19}{24}; \frac{3}{4}; \frac{51}{70}; \dots$

Resulta:

- A) 379 B) 380 C) 479
D) 480 E) 579

14. La suma S_n de los primeros “n” términos de una sucesión aritmética es igual a la suma S_m de los primeros “m” términos de esta sucesión ($m \neq n$). Entonces S_{m+n} , es:

- A) 1 B) -1 C) n D) m E) 0

15. Los números: $\log_k x; \log_m x; \log_n x$, forman una sucesión aritmética ($k, m, n \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$), el valor de $(n^m)^{\log_k m}$, resulta:

- A) 1 B) n C) n^2 D) m^2 E) k^2

16. En una progresión aritmética “a” es el primer término, r la razón y $S_n; S_{2n}; S_{3n}$, son las sumas respectivas de los “n”, “2n” y “3n” primeros términos de la progresión. Si $N = S_{3n} - S_{2n} - S_n$, entonces se afirma que:

- I) N y r tienen el mismo signo
II) N depende de “a” y r solamente
III) N depende de “n” y r solamente



Entonces la afirmación correcta, es:

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III D) Solo I y II E) Solo II y III

17. En una progresión geométrica el primer término es 7 y el último es 448 . Si la suma de los términos de dicha progresión es 889. Entonces el número de términos de la progresión geométrica , es:

- A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

18. Los siguientes números forman una sucesión tipo Fibonacci, esto significa que a partir del 3er término, todos los términos son iguales a la suma de los dos términos que lo anteceden $26_n; 35_n; 63_n; \overline{abc}_n$

Entonces el valor de n^b , es:

- A) 36 B) 49 C) 64 D) 81 E) 100

19. El número de términos que tiene la siguiente progresión aritmética:

$\overline{ab}_n; \overline{ba}_{(n+1)}; 88_{(n+2)}; \dots; \overline{64(n+1)}_9$, es igual a:

- A) 18 B) 20 C) 22 D) 24 E) 30

20. Los números “a” y “b” que satisfacen el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a - 2)^2 + 2(b - 3) = a(a - 16) \\ 3(a + 2) - (b - 3)(b + 3) = 5 + b(1 - b) \end{cases}$$

Son el segundo y el sexto término de una sucesión aritmética creciente. El número de términos que debemos sumar, a partir del primero, para que la suma de ellos sea 165, es:

- A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

**CLAVES**

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. E | 2. C | 3. C | 4. C | 5. D |
| 6. A | 7. D | 8. A | 9. A | 10. D |
| 11. E | 12. E | 13. A | 14. E | 15. C |
| 16. D | 17. B | 18. C | 19. A | 20. E |

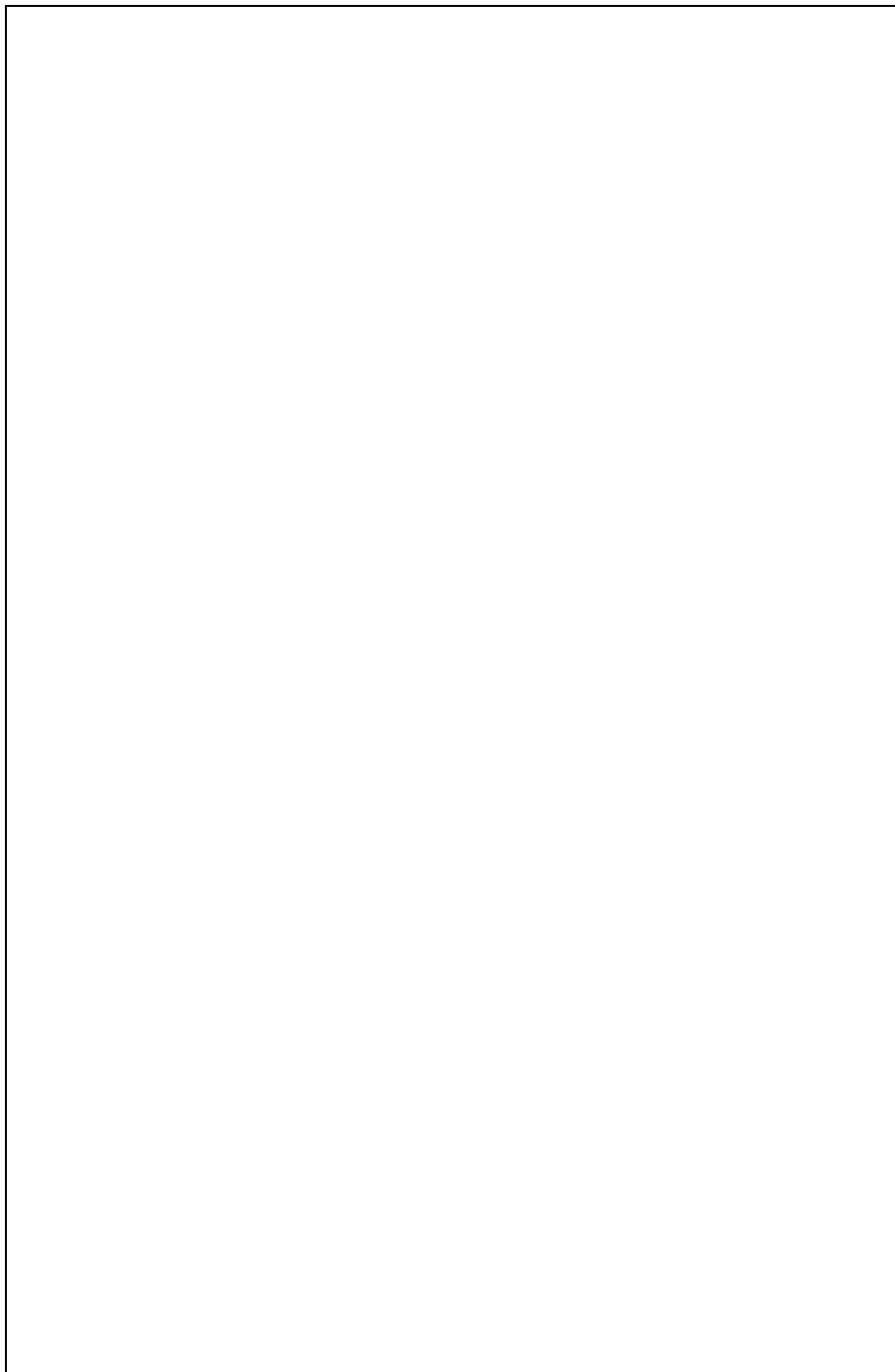
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aucallanchi Velasquez, F. (2011) Razonamiento Matemático Colección Nova (1ª edición). Perú: Racso.

Academia Cesar Vallejo (2013) Libro de Problemas (2ª edición). Perú: Lumbreras.

Casacuberta Vergés, C. (2012) Calculus una y varias variables (4ª edición). España: Reverté.

Montoya Valderrama, M. (2005) Sucesiones y Series (1ª edición). Perú: Macro.



**SEMANA 5****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Calcular el valor de una serie numérica aplicando propiedades
2. Calcular el valor de una serie numérica aplicando sumatorias.
3. Resolver situaciones problemáticas relacionadas con series numéricas aplicando definición y sus propiedades respectivas.



SUMAS HISTÓRICAS

Se cuenta que cierto personaje estaba en extremo orgulloso de ser un descendiente del mismísimo Carlomagno.

Cierto día topó con un matemático de su entorno que le hizo los siguientes cálculos:

"Ud. tiene dos padres, y cada uno de éstos, otros dos; de modo que ya tiene seis ascendientes. Como cada uno de sus cuatro abuelos tiene dos padres, el número de ascendientes que contamos son 14. Y si nos remontamos unas 40 generaciones, el número de antepasados que tiene Ud. es:

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{38} + 2^{39} + 2^{40} = 2_2\ 199\ 023_1\ 255\ 550$$

Así que una vez conocida tan extraordinaria cantidad de descendientes del gran Carlomagno, el matemático de nuestra historia pensó "poca sangre noble tiene este buen hombre"; pero siguió sintiéndose muy orgulloso de pertenecer a tan noble cuna.

En otro momento de la historia observamos a Carl Gauss que con 10 años de edad aproximadamente, realizó una suma con un procedimiento no convencional. Ante el problema planteado por su profesor Büttner de sumar los cien primeros naturales explico que antes de sumar mecánicamente se dio cuenta que sumando los términos extremos siempre obtenía 101 hasta llegar a los centrales que son 50 y 51 y entonces lo que hizo fue multiplicar 101 por la cantidad de parejas escogidas de términos extremos que eran 50 y por lo tanto obtuvo 5050. Simbólicamente:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100$$

$$S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + (4 + 97) + \dots + (50 + 51)$$

$$S = \underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101}_{50 \text{ parejas}}$$

$$S = 101 \times 50 = 5050$$

En este capítulo citaremos métodos prácticos para calcular la suma de todas aquellas adiciones indicadas de los términos de una sucesión numérica.



**1.- SERIES NUMÉRICAS:**

Una serie numérica es la adición indicada de los términos de una sucesión numérica y al resultado de dicha adición se le llama valor de la serie.

Sea la sucesión:

$$T_1 ; T_2 ; T_3 ; T_4 ; ; T_n$$

Entonces la serie numérica será:

$$T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + + T_n$$

1.1.-Serie Aritmética: La serie aritmética es la adición indicada de los términos de una sucesión o progresión aritmética.

Ejemplo ilustrativo 1:

Dada la siguiente sucesión de 10 términos determine la suma de todos ellos.

$$S = \underbrace{7 + 12 + 17 + 22 + + 52}_{10 \text{ términos}}$$

RESOLUCIÓN:

$$S = 7 + 12 + 17 + 22 + + 47 + 52$$

$$S = 52 + 47 + 42 + 37 + + 7$$

$$2S = \underbrace{59 + 59 + 59 + 59 + + 59}_{10 \text{ veces}}$$

$$2S = 59 \times 10$$

$$S = \frac{59 \times 10}{2} = \boxed{295} \text{ Rpta.}$$

➤ En general: Para toda sucesión aritmética de “n” términos

$$T_1 ; T_2 ; T_3 ; ; T_n$$

➤ La suma de todos sus términos se obtiene multiplicando la semisuma del primero y ultimo términos por el número de términos, es decir:

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + + T_n = \frac{T_1 + T_n}{2} \times n \quad S = \left(\frac{T_1 + T_n}{2} \right) n$$

$$\text{O también: } S = \left(\frac{2.T_1 + (n-1)r.}{2} \right) .n$$

Donde: T_1 = Primer término

T_n = Último término



n = Número de términos

Ejemplo ilustrativo 2:

Hallar el valor de la siguiente serie.

$$S = \underbrace{10 + 17 + 24 + \dots}_{15 \text{ términos}}$$

RESOLUCIÓN:

$$S = 10 + 17 + 24 + \dots$$

$\xrightarrow{+7} \quad \xrightarrow{+7}$

Se tiene que: $T_n = 7n + 3$

* Ahora calculemos el último término

$$T_{15} = 7(15) + 3$$

$$T_{15} = 108$$

* Luego aplicamos la fórmula:

$$S = \underbrace{10 + 17 + 24 + \dots + 108}_{15 \text{ términos}} \rightarrow S = \left(\frac{10 + 108}{2} \right) 15$$

$$S = \boxed{885} \text{ Rpta.}$$

1.2.- Serie Geométrica:

Es la adición indicada de los términos de una sucesión geométrica. Las series geométricas pueden ser:

◆ Serie Geométrica Finita:

Hallar la suma de los siguientes términos

$$S = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 512$$

RESOLUCIÓN:

$$S = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 + 512$$

$\times 4 \quad \times 4 \quad \times 4 \quad \times 4 \quad \times 4$

$$S = 1 + 1 \times 4^1 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4^3 + 1 \times 4^4 + 1 \times 4^5$$

$$4S = 1 \times 4^1 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4^3 + 1 \times 4^4 + 1 \times 4^5 + 1 \times 4^6$$

$$4S - S = 1 \times 4^6 - 1$$

Primer Término

Número de Términos

$$S = \frac{1(4^6 - 1)}{4 - 1}$$

Razón de la serie

**En General:**

Para toda sucesión o progresión geométrica de “n” términos

$$T_1 ; T_2 ; T_3 ; ; T_n$$

La suma de todos sus términos se obtiene aplicando la siguiente relación:

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + + T_n$$

$$S = \frac{T_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Donde:

T_1 : Primer Término

q = Razón ($q \neq 1$; $q \neq 0$)

n : número de términos

Ejemplo ilustrativo 3

Hallar el valor de la siguiente serie

$$S = 3 + 9 + 27 + + 729$$

RESOLUCIÓN:

$$S = \overset{\times 3}{\underbrace{3^1 + 3^2 + 3^3 + + 3^6}}$$

Se observa que ~~son 6~~ ^{son 3} términos, en donde se aplicara la regla práctica, tenemos

$$S = \frac{3(3^6 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S = \boxed{1092} \text{ Rpta.}$$

**Serie Geométrica de Infinitos Términos:**

* Hallar el valor de la siguiente serie infinita

$$S = 48 + 24 + 12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} +$$

RESOLUCIÓN:

$$S = 48 + 24 + 12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} +$$

$\times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2} \quad \times \frac{1}{2}$



Entonces: $q = \frac{1}{2}$

Multiplicando a toda la serie por $\frac{1}{2}$ se tiene

$$S = 48 + \cancel{24} + \cancel{12} + \cancel{6} + \cancel{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{2} \times S = \cancel{24} + \cancel{12} + \cancel{6} + \cancel{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \dots$$

$$S \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 48 \Rightarrow S = \frac{48}{1 - \frac{1}{2}}$$

$S = \boxed{96}$ **Rpta.**

- En general en toda serie geométrica de infinitos términos su suma (conocido como suma límite) se calcula así:

$$S = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \dots = \frac{T_1}{1 - q}$$

Ejemplo ilustrativo 4:

Hallar el valor de la siguiente serie

$$S = 32 + 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots$$

RESOLUCIÓN:

Donde: $q = \frac{1}{4}$

$$S = 32 + 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$S = \frac{32}{1 - \frac{1}{4}} \rightarrow S = \boxed{\frac{128}{3}} \text{ **Rpta.**}$$

2.- SUMATORIA

La sumatoria es la notación matemática que permite representar la suma de varios sumandos.

Así:



$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots + a_n$$

Ahora veamos algunas series notables:

Suma de los n primeros números naturales

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suma de los n primeros números impares

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Suma de los n primeros números naturales cuadráticos

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suma de los n primeros números naturales cúbicos

$$\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Ejercicios Resueltos



1.- El valor de $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{420}$ es:

A) $\frac{20}{21}$

B) $\frac{20}{17}$

C) $\frac{20}{19}$

D) $\frac{20}{13}$

E) $\frac{20}{19}$

RESOLUCIÓN:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21}\right) \text{ Simplificando:}$$

$$S = 1 - \frac{1}{21} = \boxed{\frac{20}{21}}$$

CLAVE "A"



2.- El valor de $S = \frac{1}{5} + \frac{5}{25} + \frac{9}{125} + \frac{65}{625} + \dots$ es:

A) 5/6

B) 4/5

C) 3/5

D) 2/3

E) 1/3

RESOLUCIÓN

$$S = \frac{3^1 - 2^1}{5^1} + \frac{3^2 - 2^2}{5^2} + \frac{3^3 - 2^3}{5^3} + \frac{3^4 - 2^4}{5^4} + \dots$$
$$S = \left(\frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2} + \frac{3^3}{5^3} + \dots \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{2^2}{5^2} + \frac{2^3}{5^3} + \dots \right) = \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} - \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{6}$$

CLAVE "A"

3.- Si $E = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \dots - 50^2$ entonces la quinta parte de E es:

A) -1 285

B) -1 275

C) -258

D) -257

E) -255

RESOLUCIÓN:

Tomamos los términos de dos en dos y aplicamos diferencia de cuadrados.

$$E = (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + (5-6)(5+6) + \dots + (49-50)(49+50)$$

E está conformada por $50 / 2 = 25$ sumandos.

$$E = -3 - 7 - 11 - \dots - 99 = \left(\frac{-3 - 99}{2} \right) \times 25 = -1275$$

CLAVE "B"

4.- En la suma $S = \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$ el menor número

natural n que satisface $S > \frac{37}{78}$ es:

A) 37

B) 38

C) 39

D) 40

E) 41

**RESOLUCIÓN:**

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} > \frac{37}{78}$$

Luego $n > 38$. Por tanto, el menor valor natural de n es 39.

CLAVE “C”

5.- Roxana ahorra sucesivamente cada día. El primer día S/. 1, el segundo día S/. 8, el tercer día S/. 27 y así sucesivamente hasta que el día m ahorra S/. 343. Asimismo, Roberto ahorra el primer día S/. 4, el segundo día S/. 12, el tercer día S/. 20 y así sucesivamente hasta el día n en que todos sus ahorros equivalen al total ahorrado por Roxana. El valor de $m + n$ es:

A) 10
D) 21

B) 12
E) 25

C) 15

RESOLUCIÓN:

Se tiene que $343 = m^3$ entonces $m = 7$

Ahorro de Roxana

Ahorro de Roberto

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 7^3 = 4 + 12 + 20 + \dots n \text{ términos}$$

$$\text{Luego: } \left(\frac{7 \times 8}{2}\right)^2 = \left[\frac{2 \times 4 + 8(n-1)}{2}\right]n \text{ de donde } n = 14$$

$$\text{Por tanto, } m + n = 7 + 14 = 21$$

CLAVE “D”

6.- Si:

$$E = 1 + (1 + 5) + (1 + 20) + (1 + 59) + \dots (1 + 10229)$$

entonces la suma de las cifras de E es:

A) 22
D) 28

B) 23
E) 30

C) 24

RESOLUCIÓN:



$$E = 1 + 6 + 21 + 60 + \dots + 10230 = 1 + 2 \times 3 + 3 \times 7 + 4 \times 15 + \dots + 10 \times 1023$$

$$E = 1(2^1 - 1) + 2(2^2 - 1) + 3(2^3 - 1) + 4(2^4 - 1) + \dots + 10(2^{10} - 1)$$

$$E = (1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \dots + 10 \times 2^{10}) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10)$$

Pero el minuendo "M" es

$$M = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + \dots + 10 \times 2^{10}$$

multiplicando a cada miembro de la ecuación por 2 se tiene:

$$2M = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + 4 \times 2^5 + \dots + 10 \times 2^{11}.$$

Restando cada lado de las dos últimas expresiones se tiene:

$$2M - M = -(1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + \dots + 1 \times 2^{10}) + 10 \times 2^{11}$$

$$M = -2 \left(\frac{2^{10} - 1}{2 - 1} \right) + 10 \times 2^{11} = -2^{11} + 2 + 10 \times 2^{11} = 9 \times 2^{11} + 2 = 18434$$

Retomando la expresión dada se tiene: $E = 18434 - \frac{10 \times 11}{2} = 18379$

La suma de cifras de E es $1+8+3+7+9 = 28$

CLAVE "D"

7.- Se deja caer una pelota desde una altura de 90 m, en cada rebote la pelota se eleva $\frac{1}{3}$ de la altura de la cual cayó la última vez, la distancia recorre la pelota hasta quedar en reposo es:

A) 160 m

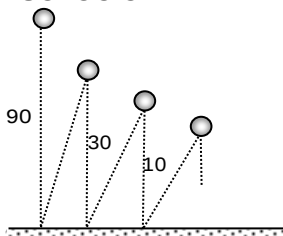
B) 180 m

C) 200 m

D) 240 m

E) 220

RESOLUCIÓN:



$$S = S_{\text{caída}} + S_{\text{rebote}}$$

$$S_{\text{caída}} = 90 + 30 + 10 + \frac{10}{3} + \dots$$

$$S_{\text{caída}} = \frac{90}{1 - \frac{1}{3}} = 135 \text{ m} \quad S_{\text{caída}} = 135 \text{ m} \quad ;$$

$$S_{\text{rebote}} = S_{\text{caída}} - \text{la caída} \rightarrow$$



$$S_{\text{rebote}} = 135 - 90 = 40 \text{ m}$$

$$S_{\text{rebote}} = 40 \text{ m}$$

$$S = 135 + 45 = \boxed{180 \text{ m}}$$

CLAVE "B"**Ejercicios Propuestos**

1. Al sumar:

2.

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \dots \infty ; \text{ resulta:}$$

A) 1

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{1}{3}$

D) $\frac{1}{5}$

E) $\frac{1}{6}$

3. Al calcular "M", se obtiene:

$$M = \frac{1}{1(3)} + \frac{1}{3(5)} + \frac{1}{5(7)} + \dots + \frac{1}{19(21)}$$

A) $\frac{10}{21}$

B) $\frac{20}{21}$

C) $\frac{17}{33}$

D) $\frac{19}{20}$

E) $\frac{19}{33}$

4. El valor de E , luego de efectuar la operación es:



$$E = \frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 6} + \dots \infty$$

- A) 2 B) $\frac{11}{18}$ C) $\frac{12}{13}$
D) $\frac{2}{17}$ E) $\frac{11}{13}$

5. La expresión E tiene como resultado a:

$$E = 6 + \underbrace{(5x - 1) + (5x - 3) + (5x - 5) + \dots + 131}_{5x+2 \text{ términos}}$$

- A) $120+5x$ B) $25x^2$ C) $25x^2 - 131$
D) 137 E) $173-25x^2$

6. El valor de la serie

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{7}{27} + \frac{15}{81} + \dots \text{es:}$$

- A) $3/4$ B) $3/5$ C) $3/7$ D) $3/8$ E) $5/2$

7. El valor de "x" en:

$$1 + 8 + 27 + \dots + 343 = 4 + 12 + 20 \dots + x; \text{ es:}$$

- A) 95 B) 101 C) 108 D) 113 E) 116

8. La suma de los 20 primeros términos comunes de las sucesiones 7; 11; 15; 19; ... y 9; 16; 23; 30; ... es:

- A) 4480 B) 4980 C) 5380 D) 5680 E) 5780

9. La suma de la expresión P es:

$$P = 1 \times 5 + 2 \times 6 + 3 \times 7 + \dots + 30 \times 34$$



A)11315
D)11615

B)11415
E)11715

C)11515

10. El resultado de la sumatoria infinita es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + 3n} \right)$$

A)2

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{11}{18}$

D) $\frac{12}{17}$

E) $\frac{1}{3}$.

11. La sumatoria indicada presenta 40 términos, su resultado es:

$$\sum_{k=1}^{40} \left(\frac{1}{4k^2 - 1} \right)$$

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{3}$

C) $\frac{1}{6}$

D)1

E) $\frac{40}{81}$

12. Al sumar, se obtiene:

$$1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots$$

A) $\frac{9}{16}$

B) $\frac{3}{8}$

C)6

D) $\frac{5}{8}$

E)4



$$12. \text{ Si } \frac{\overbrace{111+113+115+\dots+A}^{X \text{ TÉRMINOS}}}{\underbrace{1+3+5+7+\dots+B}_{X \text{ TÉRMINOS}}} = 11$$

entonces el valor de $A+B$ es:

A) 131
D) 152

B) 132
E) 162

C) 142

13. Si la suma de los términos de una sucesión lineal está representada por el número $\overline{xxx}$; y el primer término y la razón de la sucesión son iguales a 1, entonces el producto del número de términos de la sucesión multiplicado por "x" es:

A) 198
D) 268

B) 216
E) 298

C) 256

14. El valor de:

$$Q = \underbrace{1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) + \dots}_{20 \text{ sumandos}} \text{ es:}$$

A) 16170
D) 16817

B) 17160
E) 14270

C) 18160

15. En una sucesión formada por números enteros consecutivos el primer término es (a^2+1) y la suma de los $(2a+1)$ primeros términos se puede expresar mediante:

A) $(a+1)^2$
D) $2(a+1)^2$

B) $(a+1)^3$
E) $a^3+(a+1)^2$

C) $a^3+(a+1)^3$

16. Dado la progresión geométrica $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$;

si la suma de todos sus términos es ; además $a_1 r = \frac{1}{2}$; donde "r" es la razón de la progresión, entonces el valor de a_8 es:



D) $\frac{1}{20}$

B) $\frac{1}{12}$

E) $\frac{1}{24}$

C) $\frac{1}{16}$

17. Dado la sucesión lineal $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$.

$$\text{Si } \frac{1}{x_1 \cdot x_2} + \frac{1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{1}{x_3 \cdot x_4} + \dots + \frac{1}{x_{k-1} \cdot x_k} = \frac{20}{309};$$

además $x_1 \cdot x_k = 309$ entonces el valor de k^2 es:

A) 225

B) 169

C) 400

D) 441

E) 625

18. El valor de

$$S = \underbrace{2 + 3 + 10 + 15 + 26 + 35 + 50 + 63 + \dots}_{40 \text{ Términos}}$$

A) 22140

B) 31560

C) 23470

D) 25580

E) 25740

19. Si Marisol se propone escribir la sucesión: 5; 12; 19; 26; ... hasta que encuentre por tercera vez el término que termine en cifra tres; entonces la suma de todos los términos de esta sucesión es:

A) 2268

B) 2269

C) 2271

D) 2271

E) 2225

20. Elmer dijo: "mi edad en años equivale al número de términos de una sucesión aritmética cuya suma de términos es 3575.

Si el tercer término es $8 \log_{\sqrt{3}} \sqrt[4]{3}$ y el sexto término equivale a

$$\frac{5 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 7\sqrt{3}; \text{ entonces la edad de Elmer es:}$$

A) 48 años

B) 49 años

C) 50 años

D) 51 años

E) 52 años

**CLAVES**

1. E	2.E	3.E	4.D	5.E
6. C	7. E	8. A	9. C	10. E
11.C	12.D	13. B	14. A	15. E
16. C	17.D	18. A	19. E	20. C

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Casacuberta Vergés, C. (2012) Calculus una y varias variables (4ª edición). España: Reverté.

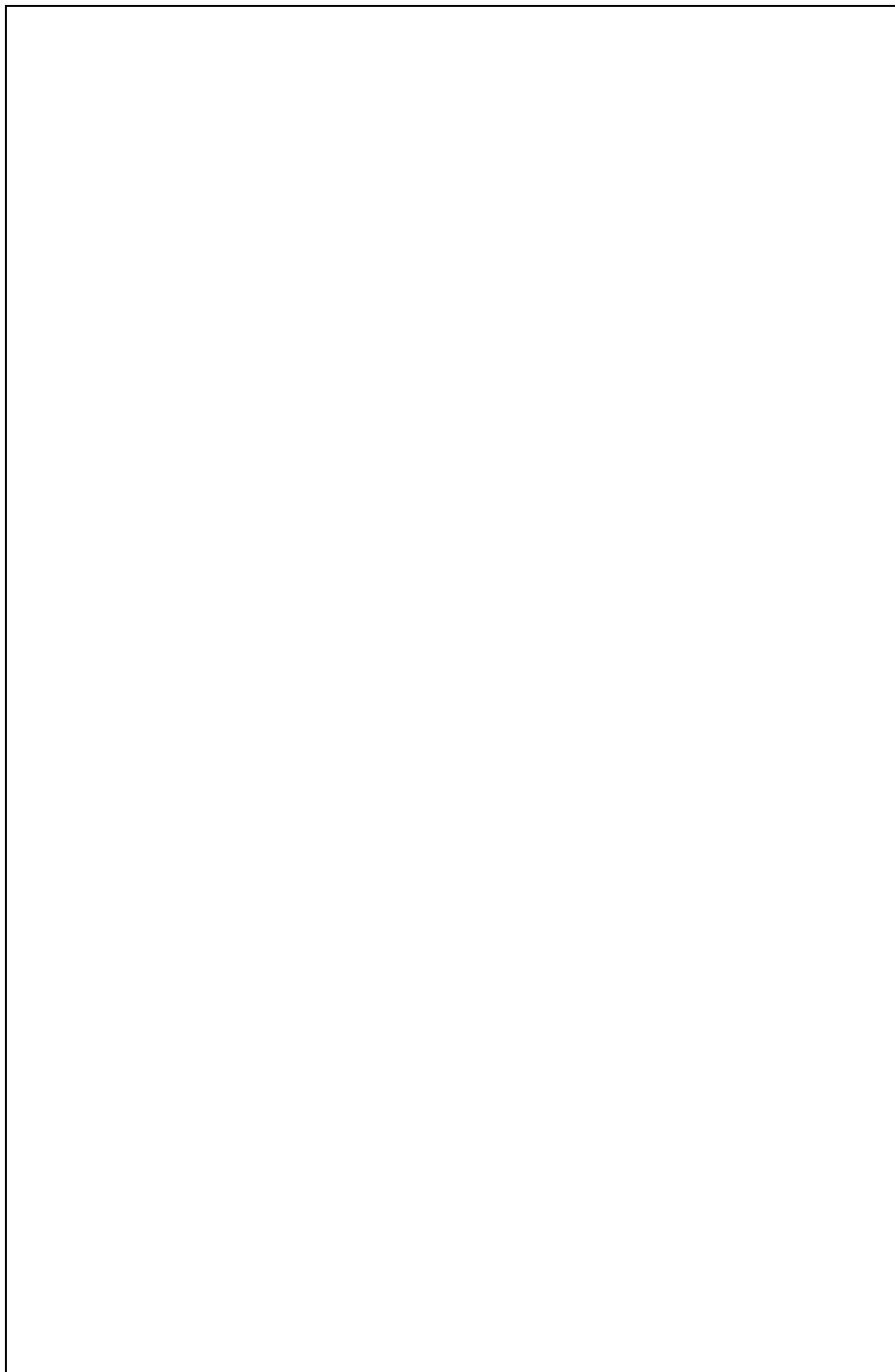
Montoya Valderrama, M. (2005) Sucesiones y Series (1ª edición). Perú: Macro.

Yáñez Díaz, J. y Yáñez Díaz, J. (2015) Razonamiento Matemático Teorico Práctico (1ª edición). Perú: Aplicación Gráfica S.R.L.



SEGUNDO EXAMEN SUMATIVO





**SEMANA 6****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Potenciar la capacidad de concentración discriminando figuras geométricas con características requeridas.
2. Utilizar el principio de adición y multiplicación para resolver problemas sobre conteo de números y eventos.
3. Ejercitar la capacidad de análisis en conteo de puntos de intersección entre las figuras, usando las fórmulas apropiadas.
4. Resuelve situaciones problemáticas relacionadas a recorridos euleriados o recorridos mínimos.



ESTRATEGIAS PARA CONTAR Y SU VÍNCULO CON LA GEOMETRÍA

En determinados problemas, se observa que una operación (o actividad) aparece en forma repetitiva y es necesario entonces conocer la cantidad de formas que se puede realizar dicha operación. Para tales casos es útil conocer determinadas técnicas de conteo que facilitarán el cálculo y será el medio adecuado para resolver estos problemas.

Por conteo entendemos al proceso que nos permitirá identificar un número, una figura geométrica ó un evento que presente una característica requerida, para luego contarlo la mayor cantidad de veces.

Asimismo uno de los problemas más remotos relacionados con la teoría de las gráficas fue el problema de los puentes de Königsberg que pregunta si es posible dar un paseo en la ciudad mostrada en la Figura 6.1 y regresar al punto de partida cruzando cada puente una sola vez.

Tierra

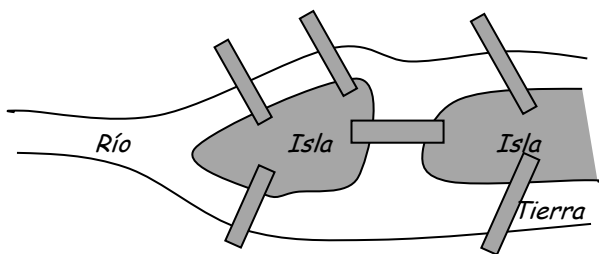


Figura 6.1

En 1736 el matemático suizo Leonhard Euler resolvió el problema. Construyó la Figura 6.2 reemplazando la tierra firme por vértices y los puentes por aristas.

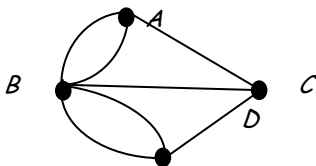
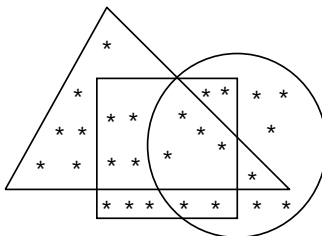


Figura 6.2

Euler demostró usando su sistema de líneas y puntos de la figura 6.2 que no es posible dar un paseo en la ciudad mostrada de la Figura 6.1.

**1. CONTEO POR SIMPLE INSPECCIÓN**

Contamos directamente en la figura utilizando únicamente nuestra capacidad de observación.



1. ¿Cuántas regiones simples hay?
2. ¿En cuántas regiones simples se observan por lo menos 3 asteriscos?
3. ¿En cuántas regiones simples se observan a lo más 2 asteriscos?
4. ¿En cuántas regiones simples se observan 4 asteriscos?
5. ¿Cuántos asteriscos pertenecen al triángulo y al cuadrado pero no al círculo?

2. MÉTODO COMBINATORIO

Asignamos dígitos y/o letras a todas las figuras simples que componen la figura principal y luego contamos anotando los dígitos o combinaciones de ellos que corresponden a la figura buscada. Es recomendable proceder al conteo de forma ordenada y creciente, es decir, figuras de un dígito, figuras de dos dígitos y así sucesivamente. (ver ejemplo ilustrativo 1)

3. CONTEO DE SEGMENTOS

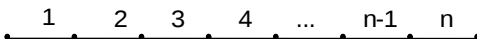
$$\begin{array}{c} \text{1} \quad \text{②} \\ \text{---} \end{array}$$
$$\text{Total de segmentos} = 3 = \frac{\text{②} \times 3}{2}$$

$$\begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \quad \text{③} \\ \text{---} \end{array}$$
$$\text{Total de segmentos} = 6 = \frac{\text{③} \times 4}{2}$$

$$\begin{array}{c} \text{1} \quad \text{2} \quad \text{3} \quad \text{④} \\ \text{---} \end{array}$$

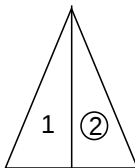


$$\text{Total de segmentos} = 10 = \frac{4 \times 5}{2}$$

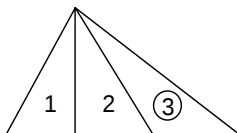


$$\boxed{\text{Total de segmentos} = \frac{n(n+1)}{2}}$$

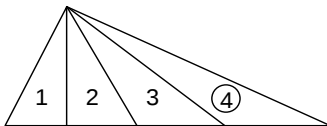
4. CONTEO DE TRIÁNGULOS



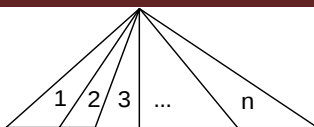
$$\text{Total de triángulos} = 3 = \frac{2 \times 3}{2}$$



$$\text{Total de triángulos} = 6 = \frac{3 \times 4}{2}$$

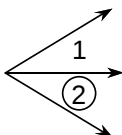


$$\text{Total de triángulos} = 10 = \frac{4 \times 5}{2}$$

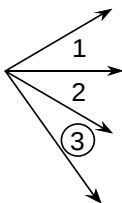


$$\text{Total de triángulos} = \frac{n(n+1)}{2}$$

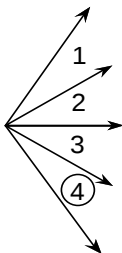
5. CONTEO DE ÁNGULOS MENORES DE 180°



$$\text{Total de ángulos} = 3 = \frac{\textcircled{2} \times 3}{2}$$

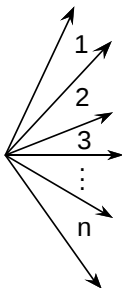


$$\text{Total de ángulos} = 6 = \frac{\textcircled{3} \times 4}{2}$$





$$\text{Total de ángulos} = 10 = \frac{4 \times 5}{2}$$



$$\text{Total de ángulos menores que } 180^\circ = \frac{n(n+1)}{2}$$

6. CONTEO DE CUADRILÁTEROS

1	2	3	4	...	n-1	n
---	---	---	---	-----	-----	---

$$\text{Total de cuadriláteros} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Observación:

Para su demostración se aplica el mismo criterio de los casos anteriores.

1	2	3	4	...	n-1	n
2						
3						
⋮						
m-1						
m						

$$\text{Total de cuadriláteros} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$



Observación:

1	2	3	4	...	n-	n
2						
3						
⋮						
m-1						
m						

Si cada cuadrilátero simple es un cuadrado entonces:

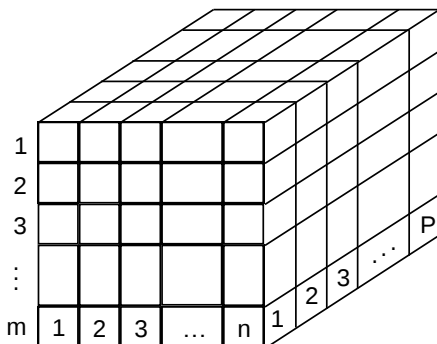
$$N^{\circ} \text{ cuadrados} = mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \dots$$

Hasta que uno de los factores sea 1.

Cuando $m = 4$ y $n = 6$ resulta:

$$\begin{aligned} N^{\circ} \text{ cuadrados} &= 4 \times 6 + 3 \times 5 + 2 \times 4 + 1 \times 3 \\ N^{\circ} \text{ cuadrados} &= 50 \end{aligned}$$

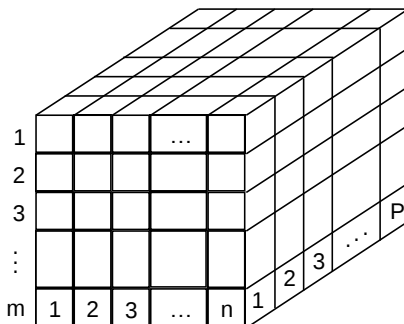
7. CONTEO DE PARALELEPÍPEDOS



$$\text{Total de paralelepípedos} = \frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}$$



Observación:



Si cada paralelepípedo simple es un cubo, entonces:

$$\text{Total de cubos} = m \times n \times p + (m-1)(n-1)(p-1) + (m-2)(n-2)(p-2) \dots$$

Hasta que uno de los factores sea 1.

Cuando $m = 7$, $n = 10$ y $p = 3$ resulta:

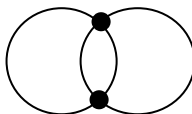
$$\text{N}^\circ \text{ cubos} = 7 \times 10 \times 3 + 6 \times 9 \times 2 + 5 \times 8 \times 1$$

$$\text{N}^\circ \text{ cubos} = 358$$

8. CONTEO DE PUNTOS DE INTERSECCIÓN DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

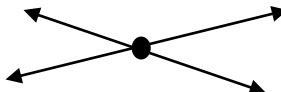
a) Máximo número de puntos de intersección de “n” circunferencias.

$$\# \text{puntos} = n(n-1)$$



b) Máximo número de puntos de intersección de “n” rectas.

$$\# \text{puntos} = \frac{n(n-1)}{2}$$





c) Máximo puntos de intersección de “n” polígonos de “L” lados

Polígonos	Nº de lados	Nº máximo de puntos de intersección
Triángulos	3	$3n(n - 1)$
Cuadriláteros	4	$4n(n - 1)$
Pentágonos	5	$5n(n - 1)$
Hexágonos	6	$6n(n - 1)$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
Polígonos	L	$L.n(n - 1)$

d) Máximo número de puntos de intersección de “n” triángulos y “c” circunferencias (sólo entre triángulos y circunferencias)

$$\# \text{puntos} = 6.n.c$$

e) Máximo número de puntos de corte de dos polígonos de diferente número de lados

Figura	Polígonos	Nº de puntos de intersección
	1 triángulo 1 cuadrilátero	$2 \times 3 = 6$
	1 cuadrilátero 1 pentágono	$2 \times 4 = 8$
...	1 polígono de m lados 1 polígono de n lados $m < n$	$2m = K$

**NOTA:**

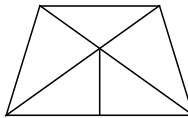
El número de puntos de intersección K es igual al duplo del número de lados del polígono con menor cantidad de lados (m)

Para hallar el total de puntos de intersección de “A” polígonos de “ m ” lados con “B” polígonos de “ n ” lados es:

$$A.B.K$$

Ejemplo ilustrativo 1:

¿Cuántos triángulos como máximo se puede contar en la siguiente figura?



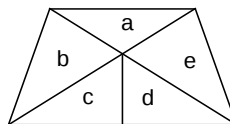
A) 5
D) 8

B) 6
E) 10

C) 7

RESOLUCION:

Asignamos una cifra o una letra a cada espacio o figura simple.



Luego empezamos a contar los triángulos.

Δ s de 1 letra: a, b, c, d, e = 5 Δ s

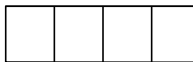
Δ s de 2 letras: ab, ae, cd = 3 Δ s

Δ s de 3 letras: bcd, cde = 2 Δ s

$\therefore$ Total de Δ s 10 Δ s

**Ejemplo ilustrativo 2:**

En el gráfico el total de cuadrados es:



A) 5

B) 6

C) 4

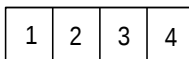
D) 8

E) N.A.

RESOLUCION:

Debemos tener en cuenta que nos solicita cuadrados y **no** cuadriláteros.

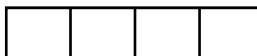
Enumeramos las figuras simples.



Luego en el gráfico se percibe la existencia de 4 cuadrados.

Ejemplo ilustrativo 3:

¿Cuántos cuadriláteros hay en la figura:



A) 10

B) 14

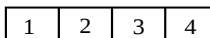
C) 12

D) 30

E) 25

RESOLUCION:

Como las figuras están ordenadas (alineadas), se cuentan las figuras pedidas más pequeñas.



Luego:

Aplica la siguiente relación para calcular el número de cuadriláteros.

$$\frac{4(4+1)}{2} = 10 \text{ cuadriláteros.}$$

9. GRAFICA



Una gráfica consiste en un conjunto de vértices (o nodos) y un conjunto de lados (o ramas) tales que cada lado está asociado a un par no ordenado de vértices (ver Figura 6.3)

1.1. “Para que se pueda trazar una figura, sin levantar el lápiz, ni repetir un trazo por segunda vez, es necesario que todos los puntos de intersección sean pares”.

1.2. “Para que se pueda trazar una figura, sin levantar el lápiz, ni repetir un trazo por segunda vez, es necesario que exista sólo 2 vértices impares, siendo los demás vértices pares”.

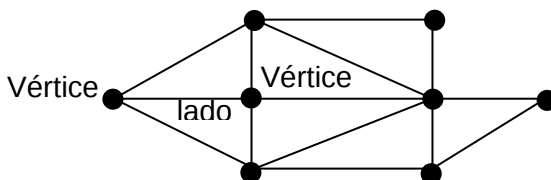


Figura 6.3

10. VALENCIA

La valencia (o grado) de un vértice es el número de lados incidentes en dicho vértice (ver Figura 6.4). En toda gráfica la suma de las valencias de los vértices es par. En cualquier grafo existe un número par de vértices con valencia impar.

Ejemplo ilustrativo 4:

Dado la gráfica mostrada en la Figura 6.4 determinar las valencias de sus vértices.

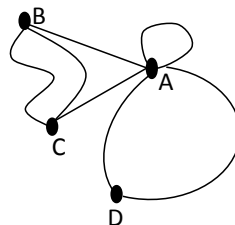


Figura 6.4

RESOLUCION:

De la Figura 6.4 se aprecia que las valencias de los vértices son:

Vértice	Valencia	Tipo
A	6	Par
B	3	Impar
C	3	Impar
D	2	Par



*Suma de valencias**14**Par*

Hay 2 vértices con valencia impar

Camino: Es la sucesión de una cantidad determinada de lados de una gráfica dada que va de un vértice a otro.

Circuito: Es un camino de que empieza y termina en un mismo vértice.

Circuito de Euler: Es un recorrido que incluye todos los lados y vértices de un grafo dado, pasando una vez por cada lado

11. TRAZO CONTINUO

Una gráfica puede ser trazada sin levantar el lápiz del papel pasando una sola vez por cada lado (o tiene un circuito de Euler) si la gráfica tiene:

12.1. *Todos sus vértices tienen valencia par, o*

12.2. *Sólo dos vértices tienen valencia impar.*

Ejemplo ilustrativo 5

Dada la gráfica de la Figura 6.4, afirmar si se puede o no trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel pasando una sola vez por cada lado. Justifique su respuesta.

RESOLUCION:

La gráfica presentada en el Gráfico 6.4 se puede trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado (o tiene el circuito de Euler) ya que de los cuatro vértices sólo dos son impares. Para ello se tiene que empezar en uno de los vértices impares, “B” o “C”, y terminar en el otro vértice impar, “C” o “B” respectivamente.

Ejemplo ilustrativo 6

Dada la gráfica de la Figura 6.5, determinar si se puede o no trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel pasando una sola vez por cada lado.

Justifique su respuesta.

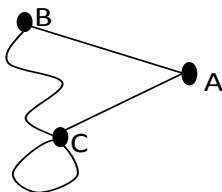


Figura 6.5

RESOLUCION:

Los vértices del gráfico de la Figura 6.5 presentan las siguientes valencias:

Vértice	Valencia	Tipo
A	2	Par
B	2	Par
C	4	Par
<i>Suma de valencias</i>	<u>8</u>	<u>Par</u>
<i>Todos los vértices tienen valencias pares</i>		

En este caso el gráfico de la Figura 6.5 muestra a todos sus vértices con valencia par pudiéndose realizar dicha gráfica de un solo trazo de manera continua sin levantar el lápiz del papel pasando una sola vez por cada lado. Para ello se debe empezar en cualquier vértice y terminar en el mismo, es decir, si se empieza a graficar en el vértice "C" se debe terminar en el vértice "C".

Ejemplo ilustrativo 7

Dada la gráfica de la Figura 6.6, si se puede trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado.

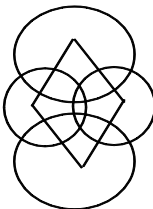


Figura 6.6

RESOLUCION:

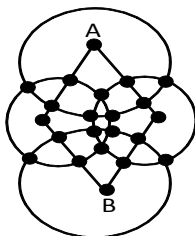


Figura 6.7

En la Figura 6.7 se muestra que los vértices “A” y “B” tienen valencia 2, los demás vértices tienen valencia 4.

luego todos los vértices son pares, pudiéndose graficar sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado.

Ejemplo ilustrativo 8

Dada la gráfica de la Figura 6.8, determinar si se puede trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado.

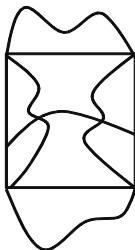


Figura 6.8

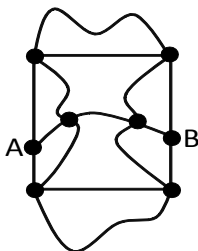
**RESOLUCION:**

Figura 6.9

En la Figura 6.9 se muestra que los vértices “A” y “B” tienen valencia impar, los demás vértices tienen valencia 4 (par)

Luego sólo tiene dos vértices de valencia impar y el resto pares, pudiéndose graficar sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado.

Ejemplo ilustrativo 9

Dada la gráfica de la Figura 6.10, determinar si se puede trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado.

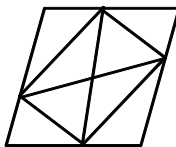


Figura 6.10

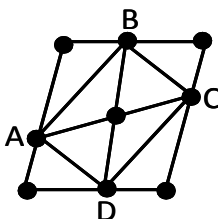
**RESOLUCION:**

Figura 6.11

En la Figura 6.11 se muestra que los vértices “A”, “B”, “C” y “D” tienen valencia impar, siendo más de dos vértices con valencia impar entonces no se puede graficar sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado (no hay circuito de Euler).

12. TRAZOS DOBLES

Una gráfica que no se puede trazar de manera continua sin levantar el lápiz del papel pasando una sola vez por cada lado (no tiene un circuito de Euler) puede tener dicho circuito con un número mínimo de trazos adicionales a la gráfica (trazos dobles).

El número mínimo de trazos adicionales está dado por:

$$13. \quad ND = \frac{I}{2} - 1$$

ND: Número mínimo de trazos dobles (*trazos adicionales*)

I: Número de vértices con valencia impar

Ejemplo ilustrativo 10.- Se tiene la gráfica de la Figura 6.12

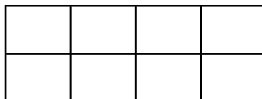


Figura 6.12

Si cada lado de los cuadrados pequeños mide 2 metros, la distancia mínima para recorrer toda la gráfica de un trazo continuo sin levantar el lápiz del papel, en metros es:



RESOLUCION:

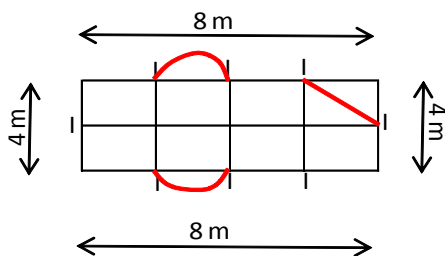


Figura 6.13

La gráfica de la Figura 6.13 presenta 8 vértices con valencia impar (I). El número mínimo de trazos dobles es:

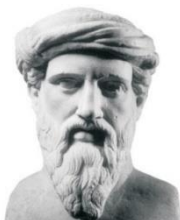
$$ND = \frac{I}{2} - 1 = \frac{8}{2} - 1 = 3 \quad \text{trazos adicionales}$$

Se tiene que convertir los vértices de valencia impar en par, dejando sólo dos vértices de valencia impar para que cumpla el requisito de que pueda ser trazado de manera continua sin levantar el lápiz del papel y pasando una sola vez por cada lado. Para ello unimos dos vértices de valencia impar de longitud 2 metros pero no de manera continua sino alternada tal que dichos vértices de valencia impar pasen a ser par quedando como se muestra en la gráfica de la figura 6.13.

El recorrido mínimo es:

$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 + 2 \times 2 + 4 \times 1 = 52 \text{ metros}$$

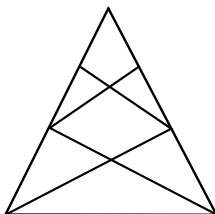
LA FIRMA DE PITAGORAS, es una figura de un solo trazo



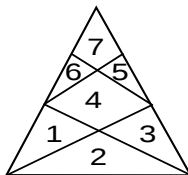
**Ejercicios Resueltos**

1.- La cantidad de hexágonos que hay en la siguiente figura es:

- A) 5
- B) 6
- C) 7
- D) 8
- E) 9



RESOLUCION:



hexágonos con:

3 dígitos: {134, 456, 124, 234} $\Rightarrow$ 4 hexágonos

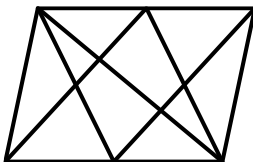
4 dígitos: {1245, 2346} $\Rightarrow$ 2 hexágonos

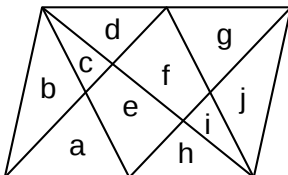
En total son 6 hexágonos.

CLAVE "B"

2.- El número máximo de triángulos en la siguiente figura es:

- A) 15
- B) 26
- C) 17
- D) 28
- E) 12



**RESOLUCION:**

Triángulos con:

1 letra: {a, b, c, d, g, h, i, j} $\Rightarrow 8 \Delta s$

2 letras: {bc, cd, ab, gj, hi, ij, ce, fi} $\Rightarrow 8 \Delta s$

3 letras: {bcd, hij, aeh, hec, dfg, dfi} $\Rightarrow 6 \Delta s$

4 letras: no existe

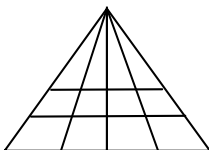
5 letras: {abceh, dfgij, cdefg, aefhi} $\Rightarrow 4 \Delta s$

En total son 26 Δs

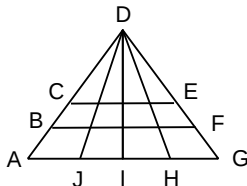
CLAVE" B"

3.- La cantidad de segmentos que hay en la siguiente figura es:

- A) 55
- B) 62
- C) 67
- D) 60
- E) 52

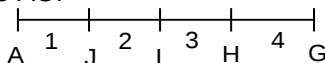
**RESOLUCION:**

Señalamos algunos puntos de la figura.





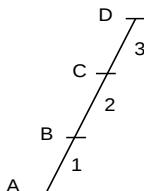
- * En el segmento AG:



Aplicamos la relación para calcular el número de segmentos:

$$\frac{4(4+1)}{2} = 10 \text{ segmentos.}$$

- * En el segmento BF, es semejante al segmento AG: 10 segmentos
- * En el segmento CE, 10 segmentos
- * En el segmento AD:



Aplicamos la relación para calcular el número de segmentos: $\frac{3(3+1)}{2} =$

6
segmentos.

- * En el segmento DJ, lo mismo que en el segmento AD, 6 segmentos.
- * En el segmento DI, 6 segmentos.
- * En el segmento DH, 6 segmentos.
- * En el segmento DG, 6 segmentos

Por lo tanto en total hay:

A	B	CE	AD	DJ	DI	DH	DG
G	F						
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
10	10	10	6	6	6	6	6

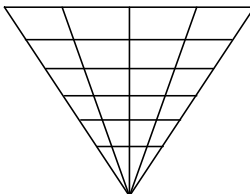
= 60 segmentos

CLAVE"D"



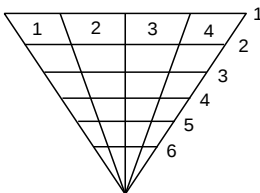
4.- La cantidad de triángulos que hay en la siguiente figura es:

- A) 38
- B) 56
- C) 67
- D) 48
- E) 60



RESOLUCION:

Señalamos:



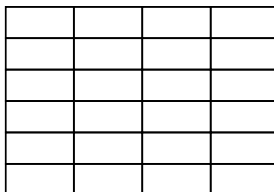
Horizontalmente:

$$6 \times \frac{4(4+1)}{2} = 60 \text{ triángulos}$$

CLAVE "E"

5.- La cantidad de cuadriláteros que hay en la siguiente figura es:

- A) 318
- B) 556
- C) 210
- D) 480
- E) 160



RESOLUCION:

Señalamos:

6			
5			
4			
3			
2			
1	2	3	4



Horizontalmente: $\frac{4(4+1)}{2}$

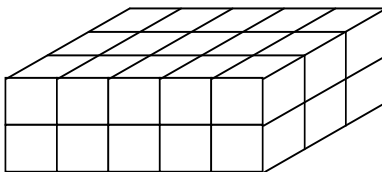
Verticalmente: $\frac{6(6+1)}{2}$

$10 \times 21 = \mathbf{210} \rightarrow \text{Rpta}$

CLAVE "C"

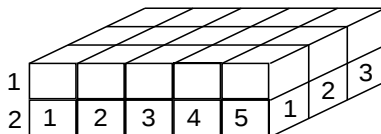
6.- La cantidad de paralelepípedos que se cuentan en:

- A) 240
- B) 150
- C) 180
- D) 270
- E) 160



RESOLUCION:

Identificamos m, n y p. Sus valores



$m = 2$

$n = 5$

$p = 3$

Aplicamos la fórmula:

Nº total de paralelepípedos

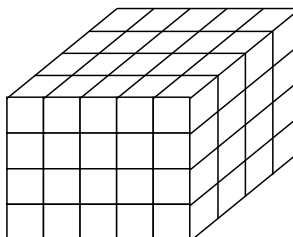
$\frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2} = 3 \times 15 \times 6 = 270$

$\therefore \text{Nº total de paralelepípedos} = \mathbf{270}$

CLAVE "D"

7.- En la siguiente figura (cada paralelepípedo simple es un cubo):

- a) ¿Cuántos paralelepípedos hay?
- b) ¿Cuántos cubos hay?
- c) ¿Cuántos paralelepípedos que no son cubos hay?



**RESOLUCION:**

Resolveremos primero identificando los valores de m, n y p

a) $m = 4$; $n = 5$ $\wedge$ $p = 4$

$$\begin{aligned}\text{N}^\circ \text{ total de paralelepípedos} &= \frac{4(5)}{2} \times \frac{5(6)}{2} \times \frac{4(5)}{2} \\ &= 10 \times 15 \times 10 = 1500\end{aligned}$$

Nº total de paralelepípedos = **1500**

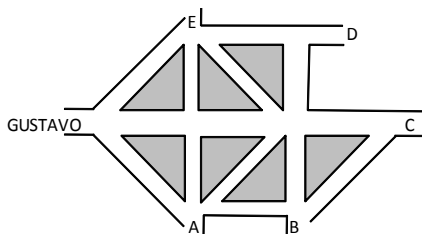
b) Nº total de cubos=

$$\begin{aligned}4 \times 5 \times 4 + (4-1)(5-1)(4-1) + (4-2)(5-2)(4-2) + (4-3)(5-3)(4-3) \\ = 80 + (3) \cdot (4) \cdot (3) + (2) \cdot (3) \cdot (2) + (1) \cdot (2) \cdot (1) = 130\end{aligned}$$

Nº total de cubos = **30**

e) $1500 - 130 = \mathbf{1370}$ paralelepípedos que no son cubos

8.- Gustavo Herrera, socio del club UNIÓN LAREDO, debe recorrer todos los pasadizos del club pasando una sola vez por cada uno de ellos, los mismos que se muestran en la gráfica adjunta. Se sabe que Gustavo empieza por la puerta donde se señala su nombre. Para que Gustavo cumpla su cometido tendrá que culminar su recorrido por la puerta:



A) A

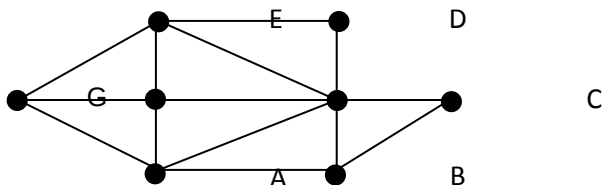
B) B

C) C



D) D

E) E

RESOLUCION:

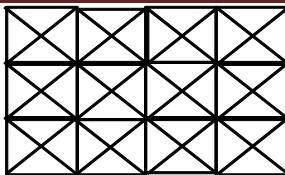
Valencias de los vértices (número de lados incidentes)

Vértices	Valencia	Par / Impar
G	3	Impar
A	4	Par
B	3	Impar
C	2	Par
D	2	Par
E	4	Par

Gustavo empieza del vértice G que tiene valencia impar. Para que pueda ir por cada uno de los pasadizos pasando una sola vez por cada uno de ellos entonces debe culminar en una salida cuya puerta tenga un vértice impar, siendo ésta la puerta B.

CLAVE: "B"

9.- El niño Pepito en su curso de Matemática realizó la gráfica adjunta valiéndose de su regla y escuadras. Pepito dijo que cada rectángulo pequeño tiene 6 m de ancho y 8 m de largo. Al término de trazar dicha gráfica se acercó a su profesor Pablito y le dijo que haga la misma gráfica pasando por todas las líneas con un trazo continuo. La longitud del menor recorrido que tendrá que trazar el profesor Pablito, en centímetros, es:



- A) 502 B) 458 C) 498 D) 455 E) 489

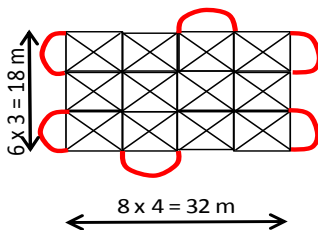
RESOLUCION:

Al observar la gráfica se tiene que:

I: Número de vértices de valencia impar (non) = 14

N_D: Número mínimo de trazos dobles.

ND = $I / 2 - 1 = 14 / 2 - 1 = 6$ (graficados con gris)

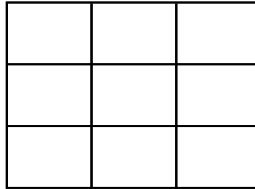


Longitud mínima recorrida:

4 filas x 32 m x + 5 columnas x 18 m + 12 equis x 20 m cada equis + 4 trazos dobles en el ancho x 6 m + 2 trazos dobles en el largo x 8 m = 498 m

CLAVE “C”

10.- En la parte central del patio del colegio “Generación Futura” tiene un cuadrado de 9 m de lado, dividido en 9 regiones iguales. Durante el recreo, los estudiantes Coquito, Juanchito y Panchito se divierten caminando por las líneas marcadas de dicha región recorriendo una sola vez por cada lado. Si eligen al estudiante Coquito a que recorra dichas líneas entonces la distancia mínima, en metros, que empleará es:



A) 72
D) 81

B) 78
E) 84

C) 87

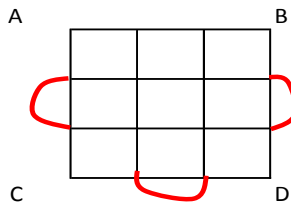
RESOLUCION:

Al observar la gráfica se tiene que:

I: Número de vértices de valencia impar (non) = 8

N_D: Número mínimo de trazos dobles.

$ND = I / 2 - 1 = 8 / 2 - 1 = 3$ (graficados con rojo)



Longitud mínima recorrida:

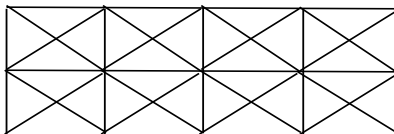
$$(4 \text{ filas} + 4 \text{ columnas}) \times 9 \text{ m} + 3 \text{ trazos dobles} \times 3 \text{ m} = 81 \text{ m}$$

CLAVE “D”

11.- Los estudiantes de Ingeniería de Materiales de la Universidad Nacional de Trujillo (UNT) han construido una estructura metálica tal como se muestra en la figura adjunta, cuyas dimensiones de cada rectángulo pequeño es de 3 cm de ancho por 4 cm de largo, para su experimento sobre cinemática en el curso de Física. Los estudiantes consiguieron una hormiga, que le llamaron Mateo, para realizar su experimento que consiste en que la hormiga recorra toda la estructura metálica pasando



una sola vez por cada lado de manera continua empezando en el extremo superior derecho de la figura. Si la hormiga tiene una rapidez de 2 cm/s, el tiempo empleado, en segundos, por Mateo para que se lleve a cabo el experimento, es:



A) 90
D) 226

B) 68
E) 101

C) 80

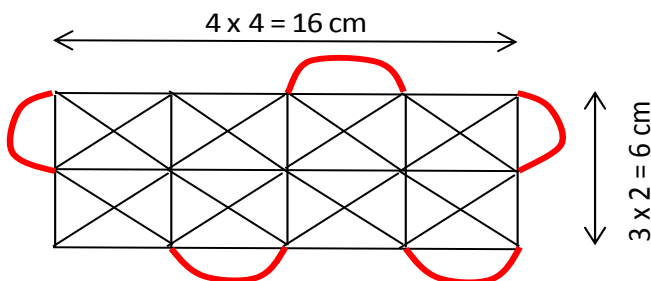
RESOLUCION:

Al observar la gráfica se tiene que:

I: Número de vértices de valencia impar (non) = 12

N_D : Número mínimo de trazos dobles.

$$N_D = I / 2 - 1 = 12 / 2 - 1 = 5$$



Longitud mínima:

$$3 \text{ filas} \times 16 \text{ cm} + 5 \text{ columnas} \times 6 \text{ cm} + 8 \text{ equis} \times 5 \text{ cm por cada equis} + 3 \text{ trazos dobles a lo largo} \times 4 \text{ cm} + 2 \text{ trazos dobles a lo ancho} \times 3 \text{ cm} = \mathbf{136 \text{ cm}}$$

$$\text{Tiempo} = 136 \text{ cm.} \div 2 \text{ cm.} = 68 \text{ s.}$$

CLAVE "B"



12.- Se tiene dos sólidos geométricos regulares, un octaedro y un tetraedro de igual arista que se unen por uno de sus vértices y forman un poliedro no convexo. Si cada arista mide 7 cm y una hormiga las recorre en el menor tiempo posible entonces su recorrido mínimo en centímetros es:

A) 112

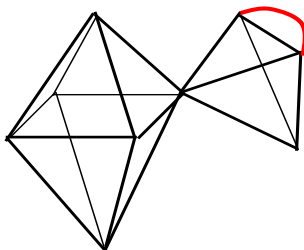
B) 133

C) 84

D) 98

E) 105

RESOLUCION:



Al observar la gráfica se tiene que:

I : Número de vértices de valencia impar (non) = 4

N_D : Número mínimo de trazos dobles.

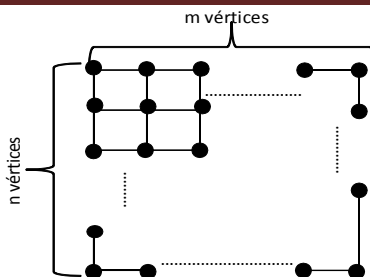
$$N_D = I / 2 - 1 = 4 / 2 - 1 = 1$$

Longitud mínima:

$$12 \text{ aristas del octaedro} \times 7 \text{ cm} + 6 \text{ aristas del tetraedro} \times 7 \text{ cm} + 1 \text{ trazo doble} \times 7 \text{ cm} = \mathbf{133 \text{ cm}}$$

CLAVE "B"

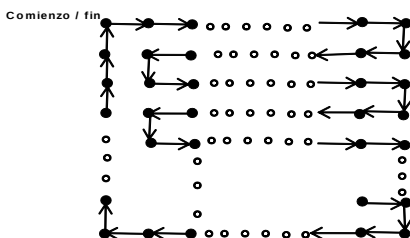
13.- Un circuito Hamiltoniano o de Hamilton es un gráfico que empieza y termina en el mismo vértice, pasando una vez por cada vértice. Los valores de m y n en el gráfico adjunto que hace que tenga un circuito de Hamilton es:



- A) n es impar y $m > 1$
- B) n es par y $m > 1$
- C) m es impar y $n > 1$
- D) m es par y $n > 1$
- E) A o D

RESOLUCION:

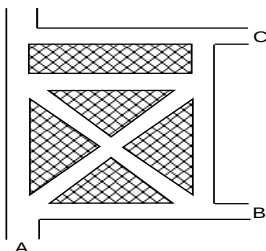
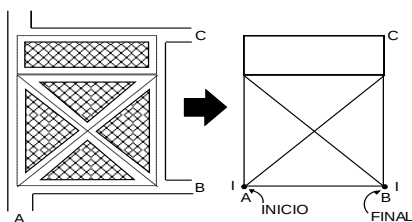
Si n es par y $m > 1$ o si m es par y $n > 1$, hay un circuito Hamiltoniano. La figura muestra la solución en el caso en el que n es par.



Si $n=1$ o $m=1$, no hay circuitos y, en particular, no hay circuito Hamiltoniano alguno. Supóngase que n y m son impares y que el grafo tiene un circuito Hamiltoniano. Puesto que hay mn vértices, este circuito tiene mn lados; por lo tanto, el circuito Hamiltoniano debe tener tantos lados “hacia arriba” como lados “hacia abajo”, y tantos lados “hacia la derecha” como lados “hacia la izquierda”. Por ello, un circuito Hamiltoniano debe tener un número par de lados. Esta contradicción demuestra que si n y m son impares, el grafo no tiene un circuito Hamiltoniano

**CLAVE "E"**

14. Un deportista desea recorrer todas las calles del barrio mostrado imponiéndose a sí mismo la condición de pasar solo una vez por cada calle. Si entra por la puerta A. ¿Por cuál de las otras puertas saldrá al terminar su recorrido?

**RESOLUCION:**

Se observa que la figura presenta 2 puntos impares, sabemos que al empezar en uno de ellos (A), se terminará en el otro punto impar (B).

Rpta: B

**Ejercicios Propuestos**

1. En un plano se tienen “n” rectas secantes, al duplicar el número de ellas, el máximo número de puntos de intersecciones aumenta en 145. El valor de “n” es:

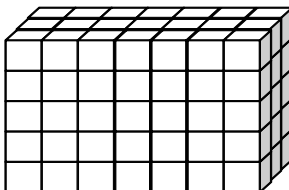
A) 9 B) 8 C) 7
D) 10 E) 11

2. La cantidad de numerales que existe en la forma

$$(a+1)\left(\frac{b}{2}\right)(b+3)a(c-1)_8 \quad \text{es:}$$

A) 84 B) 150 C) 168
D) 210 E) 124

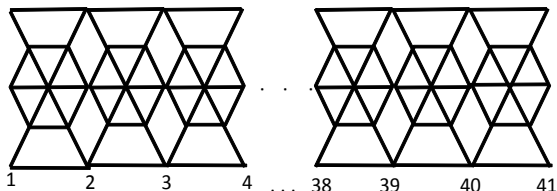
3. En la figura, la cantidad de paralelepípedos en total, cubos en total y paralelepípedos que no son cubos en total, respectivamente, es:



A) 2 520; 340; 2 180
B) 2 320; 250; 2 070
C) 2 520; 120; 2 040
D) 2 320; 168; 2 120
E) 2 520; 168; 2 352



4. Dada la siguiente figura, el número total de triángulos que se puede contar es:



- A) 476
B) 488
C) 398
D) 496
E) 480
5. Fabrizio un turista que visitó Trujillo por los juegos bolivarianos pagó al hotelero su hospedaje por 7 días, con una cadena de 7 eslabones ; el cual aceptó con la condición que el pago lo efectuara con un eslabón diariamente y por adelantado .
La mínima cantidad de cortes que tuvo que realizar el joyero sobre la cadena es:

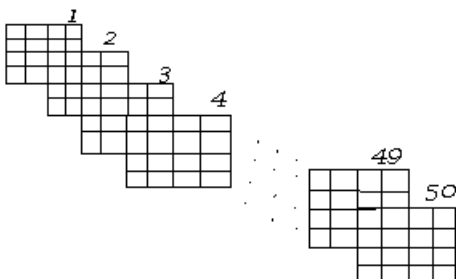
- A) 2
B) 5
C) 1
D) 3
E) 4

6. La empresa de transportes “ Hana Montana” ha decidido confeccionar su logotipo que consiste en un dibujo con circunferencias y rectas , todas de distinto color y que al bosquejarse se ha observado como máximo 209 puntos de corte entre todas las figuras . Si las rectas son sólo dos , entonces la cantidad de colores que se emplearon fue:

- A) 18
B) 17
C) 16
D) 15
E) 12



7. Los cuadrados se pueden contar como máximo en la figura adjunta:



A) 1255

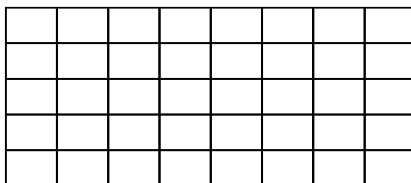
B) 1305

C) 1270

D) 1325

E) 1190

8. Cada cuadrado de la cuadrícula tiene 1 cm^2 de área. El número de hexágonos de 4 cm^2 de área que se puede contar en total en la siguiente figura es:



A) 86

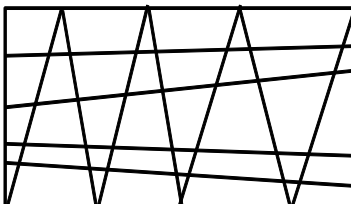
B) 90

C) 108

D) 180

E) 118

9. De la siguiente figura, el número de cuadriláteros que se puede contar en total es:





- A) 740
- B) 850
- C) 450
- D) 500
- E) 640

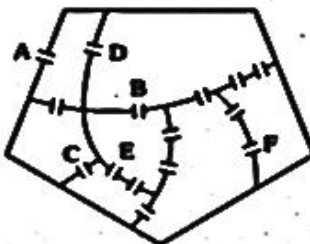
10. Si formamos un numeral escribiendo consecutivamente los números naturales a partir de 12345678910111213....., hasta que se haya escrito 4 veces el cero; las cifras que tendrá este numeral es:

- A) 72
- B) 64
- C) 76
- D) 70
- E) 71

11. Un niño recorre todos los lados y las dos diagonales de un parque rectangular de 40 m de largo por 30 m de ancho a una rapidez constante de 12 m/min. El tiempo mínimo que utilizará para recorrer dicho parque es:

- A) 21.5
- B) 25.5
- C) 24.5
- D) 22.5
- E) 20.5

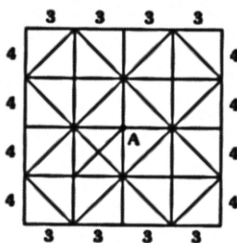
12. En un concurso de TV existe un juego; éste consiste en entrar por la puerta "A" al laberinto mostrado, encender 13 focos y salir por la puerta "A" en el menor tiempo posible. La única forma de encender un foco es pasando completamente por una puerta, pero si se vuelve a pasar por la misma puerta el foco se apagará. Te darás cuenta que para ganar el juego basta con evitar pasar por una puerta. Dicha puerta es:



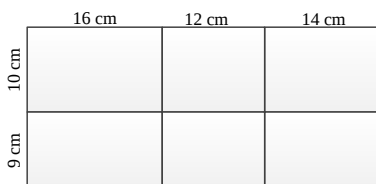
- A) B
- B) C
- C) D
- D) E
- E) F



13. El mínimo recorrido que debe realizar la punta del lápiz para poder dibujar la siguiente figura, esto sin levantar el lápiz del papel y empezando en el punto A (en centímetros) es:



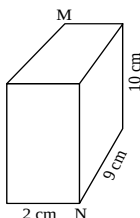
- A) 234
B) 244
C) 254
D) 264
E) 247
14. La longitud mínima en centímetros que debe recorrer un insecto para por todas las líneas en la siguiente figura es:



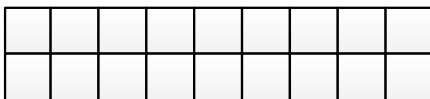
- A) 202
B) 226
C) 240
D) 282
E) 302
15. Una hormiga se encuentra en el vértice M del ladrillo, como se indica en la figura. En el vértice N se encuentra la entrada de su nido que está debajo del ladrillo. La longitud de la trayectoria más corta que describe la hormiga para llegar a N es:



- A) 14,87 cm
- B) 15 cm
- C) 19,19 cm
- D) 19,21 cm
- E) 21 cm



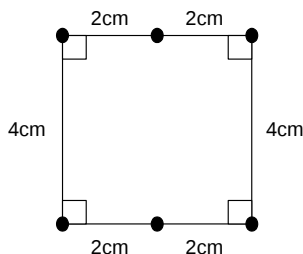
16. Se tiene el siguiente esquema de líneas donde está formado por cuadrados simples de 16 cm^2 de área.



Una hormiga, recorrió completamente por todas las líneas del gráfico a una velocidad de 20 cm por minuto, el menor tiempo utilizado es:

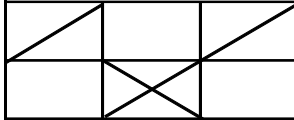
- A) 9 min 24 s
 - B) 10 min
 - C) 11 min
 - D) 11 min 30
 - E) 12 min
17. En la figura se muestran 6 puntos. La menor longitud que debe recorrer la punta de un lápiz sin levantarla del papel, para poder dibujar todos los triángulos rectángulos que tienen dichos puntos como vértices, en centímetros, es:

- A) $4(5 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$
- B) $8(2 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$
- C) $4(5 + 2\sqrt{5})$
- D) $5(4 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2})$
- E) $4(5 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{5})$

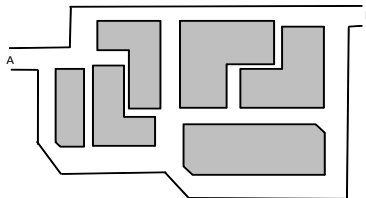




18. Se tienen nueve rectángulos pequeños iguales de 3 metros de ancho y 4 metros de largo. La longitud mínima para recorrer todas las líneas de la gráfica mostrada, en metros, es:



- A) 85
B) 86
C) 84
D) 80
E) 83
19. Rafael es un joven que se ha propuesto cruzar un laberinto desde el punto A hasta el punto B, como se muestra en la figura. Podrá el joven Rafael dijo que entró al laberinto y recorrió todos los pasillos sin pasar dos veces por el mismo pasillo.

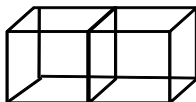


Podemos afirmar que:

- A) Rafael dijo la verdad y entró por "A"
B) Rafael no dijo la verdad ya que no se puede hacer tal cosa.
C) Rafael dijo la verdad y entró por "B"
D) Rafael no dijo la verdad porque se perdió
E) Rafael dijo la verdad ya que lo podrá hacer por cualquier entrada.



20. Dada la siguiente estructura metálica, la distancia mínima que debe recorrer un caracol para pasar por todas las aristas del sólido mostrado sabiendo que cada una de ellas mide 5 metros es:



- A) 75
- B) 85
- C) 95
- D) 105
- E) 115

**CLAVES**

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D | 2. C | 3. E | 4. A | 5. C |
| 6. D | 7. A | 8. D | 9. D | 10. E |
| 11. D | 12. A | 13. E | 14. B | 15. A |
| 16. C | 17. E | 18. E | 19. B | 20. E |

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

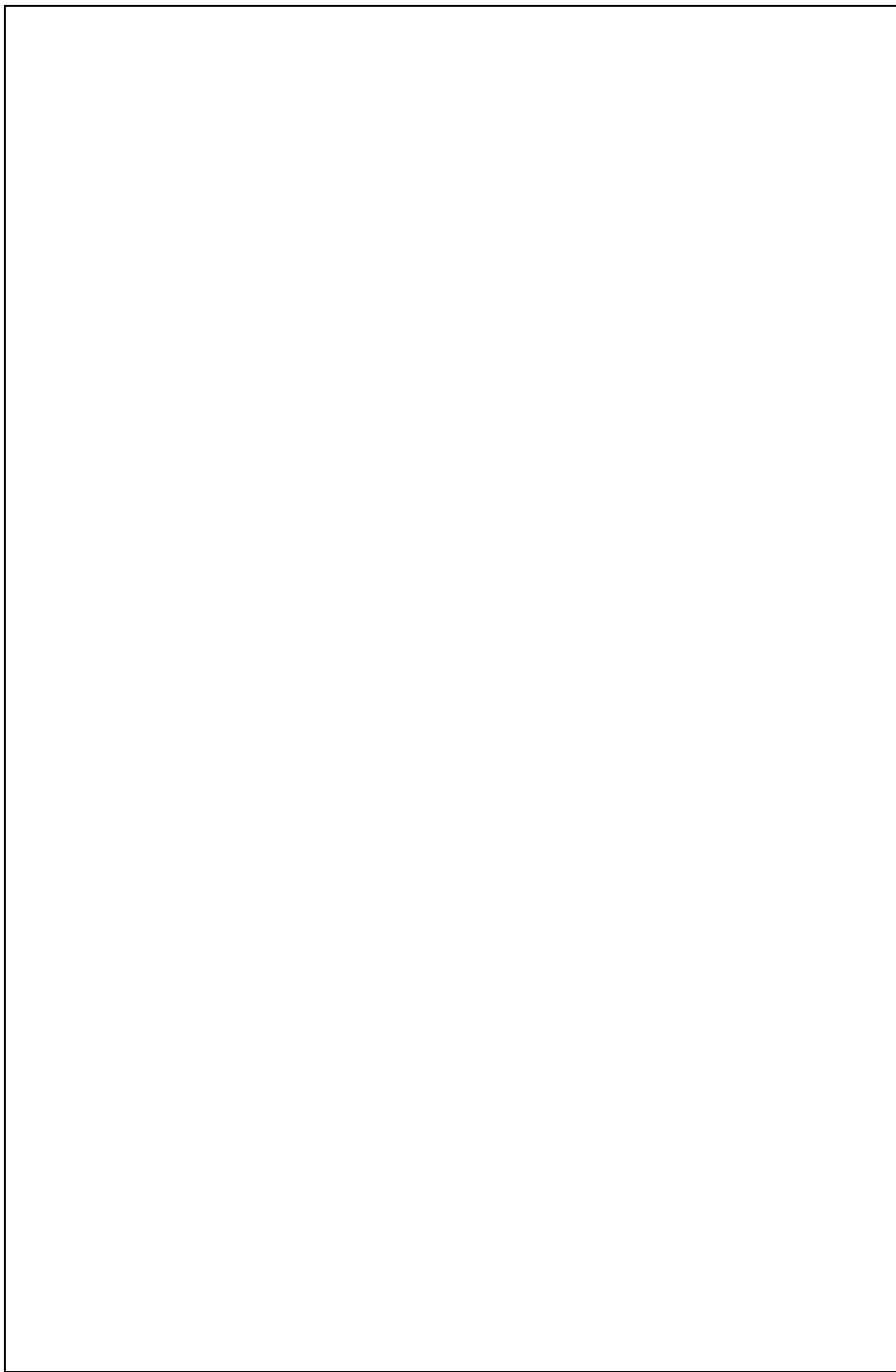
Asociación Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Donaire Peña, M. (2010) Formas y Números: La Geometría en las Olimpiadas Matemáticas (1ª edición). Perú: Fondo Editorial UCH.

Gaita Iparraguirre, C. y otros (2014) Matemáticas para no Matemáticos (2ª edición). Perú: Estudios Generales PUCP.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3ª edición). Perú: Moshera.





**SEMANA 7****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Establecer diferencias entre principio de adición y multiplicación
2. Discriminar una permutación de una combinación en situaciones problemáticas.
3. Resolver problemas reales, en casos de principio de adición, multiplicación, permutaciones y combinaciones.



MIL AÑOS PAGANDO

A fines del año, un grupo de estudiantes y yo fuimos a un restaurante donde acostumbrábamos celebrar la finalización del curso. El mesero, viejo conocido, nos recibió con amabilidad que siempre lo ha caracterizado y nos invitó a sentar.

Nos demoramos un poco para ubicarnos en la mesa. Uno de los alumnos, en broma, dijo que "como somos clientes antiguos, hoy la celebración corre por cuenta de las casa".

El mesero, sin inmutarse, respondió: "Hoy no, pero les hago una propuesta mejor. Siéntense en el orden que deseen. Mañana vuelven y se sientan en otro orden y así todos los días sin repetir nunca el orden anterior. Cuando hayan agotado todas las posibilidades, pueden escoger nuestros platos más costosos, porque ese día la casa invita al grupo".

Puesto que estábamos nueve personas, no pude dejar de sonreír frente a la astucia del muchacho. Mis alumnos y yo tendríamos que asistir como clientes durante 362 880 días, es decir, durante casi 1000 años para que la comida nos resulte gratis.

Veamos por qué nos va a tomar casi 1000 años a mis alumnos y a mi ocupar todos los órdenes posibles. Supongamos que solo hay dos personas, A y B. Por consiguiente, sólo pueden colocarse en dos órdenes: AB y BA.

Veamos ahora cuántos órdenes posibles hay que organizar. El nuevo objeto (C) puesto que son dos pares, cada uno genera tres ternas y nos resultan entonces seis ternas de objetos. Cuando agregamos el cuarto objeto (D), tendremos $6 \times 4 = 24$ posiciones posibles.

Así, con dos objetos tendremos dos posiciones ($2 \times 1 = 2$); con tres objetos tendremos seis posiciones ($3 \times 2 \times 1 = 6$), y con cuatro objetos tendremos 24 posiciones ($4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$). Con cinco objetos, el número de posiciones será de $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

Para nueve objetos el número de posiciones será de:

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362\,880$ día, ¡Esto tomaría 994 años!

Estas cuentas hacen parte de un tema conocido con el nombre de "análisis combinatorio" y trata en especial de las permutaciones y combinaciones que se generan cuando ordenamos y contamos grupos.

**1.-FACTORIAL DE UN NÚMERO(! o !).**

Se define el factorial de un número entero y positivo como el producto de todos los números enteros consecutivos, desde la unidad hasta el número o desde el número hasta la unidad inclusive.

$n !$: se lee “factorial de n ó n factorial”.

$$n ! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots (n-2) \times (n-1) \times n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplos :

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = \dots =$$

$$6! = \dots =$$

$$7! = \dots =$$

Existe

No existe

$$\sqrt{6}!$$

$$\sqrt{6} !$$

$$-5 !$$

$$(-5) !$$

$$\frac{3!}{4!}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right) !$$

Por definición : $1! = 1$
Por convención: $0! = 1$

Ejemplo Ilustrativo 1

Al simplificar:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

resulta:

**RESOLUCION:**

$$\frac{10 \times 9 \times 8! + 9 \times 8!}{8!} = \frac{8!(10 \times 9 + 9)}{8!} = 99$$

Ejemplo Ilustrativo 2

Sea : $(x+1)! + x! = 24x + 48$, el valor de “x” es:

RESOLUCION:

$$(x+1)x! + x! = 24(x+2)$$

$$x!(x+1+1) = 24(x+2)$$

$$x!(x+2) = 24(x+2) \Rightarrow x! = 24$$

$$x! = 4! \Rightarrow x = 4$$

2.-COFACTORIAL O SEMI FACTORIAL

Definamos:

$$n!! = \underline{n} = \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots \times n & (\text{si } n \text{ es impar}) \\ 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots \times n & (\text{si } n \text{ es par}) \end{cases}$$

Ejm 1.

$$7!! = \underline{7} = 1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$$

Luego: $7!! \neq (7!)!$

Ejm 2.

$$10!! = \underline{10} = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 3840$$

Luego: $10!! \neq (10!)!$

**3.-DEFINICIÓN COMPLEMENTARIA DE COFACTORIAL**

$$n!! = \frac{n!}{2^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \quad \text{y} \quad n!! = 2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)! \\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ impar} \qquad \qquad \forall n \in \mathbb{N} \text{ par}$$

Ejm.

$$5!! = \frac{5!}{2^2 (2)!} = \frac{120}{8} = 15$$

$$6!! = 2 \cdot 3(3)! = 8 \times 6 = 48$$

4.- NUMERO COMBINATORIO

Recibe este nombre el número obtenido al calcular las combinaciones de “n” elementos tomados de “k” en “k” .

Se denota: C_k^n , donde $n \in \mathbb{Z}^+$; $k \in \mathbb{Z}_0^+ \wedge n \geq k$

n: Índice superior

k: Índice inferior

Se define de la siguiente manera:

$$C_k^n = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

4.1.- Propiedades:

$$\text{a) } C_n^n = 1 \Rightarrow C_8^8 = 1$$

$$\text{b) } C_1^n = n \Rightarrow C_1^7 = 7$$

$$\text{c) } C_0^n = 1 \Rightarrow C_0^9 = 1$$

$$\text{d) } C_k^n = C_{n-k}^n \Rightarrow C_{17}^{20} = C_3^{20}$$



$$e) C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1} \Rightarrow C_5^8 = \frac{8}{5} C_4^7$$

$$f) C_{k-1}^n + C_k^n = C_k^{n+1} \Rightarrow C_6^9 + C_7^9 = C_7^{10}$$

$$g) C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n \Rightarrow C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 2^4$$

$$h) C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_n^n = 2^n - 1 \Rightarrow C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 2^5 - 1$$

5.- PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE CONTEO

El principio básico o fundamental de conteo se puede utilizar para determinar los posibles resultados cuando hay dos o más características que pueden variar, estos principios son:

5.1.- Principio de Adición (o)

Si un evento **A** ocurre de **m** maneras diferentes y otro evento **B** ocurre de **n** maneras diferentes, entonces **A** ó **B** ocurrirá de **(m+n)** maneras diferentes.

Observaciones :

- ❖ Este principio se puede extender para más de 2 eventos.
- ❖ Ocurren sucesos independientes (o bien ocurre **A** o bien ocurre **B**, nunca pueden ocurrir simultáneamente).
- ❖ En forma practica el conectivo “o” nos indica aplicar el principio de la adición (+)

Ejemplo Ilustrativo 3

Si Camila desea viajar de Lima al Cuzco y tiene a sus disposición 4 líneas aéreas y tres líneas terrestres, entonces el número de maneras diferentes que puede realizar el viaje, es:

- A) 7
D) 16

- B) 9
E) 10

- C) 12

RESOLUCION



Camila viajara al Cuzco por vía aérea o vía terrestre, nunca por ambas líneas a la vez.

AÉREA	o	TERRESTRE
4	+	3
=	7	Opciones

CLAVE “A”

5.2.- Principio de Multiplicación (y)

Si un evento A ocurre de “m” maneras y para cada una de estas, otro evento B ocurre de “n” maneras, entonces el evento A seguido de B ocurre de “m x n” maneras.

Observaciones :

- ❖ En este principio la ocurrencia es una continuidad de la otra, es decir, ocurre el evento “A” y luego ocurre el evento “B”
- ❖ Este principio se puede generalizar para más de dos eventos.
- ❖ De forma práctica el conectivo “y” , nos indica aplicar el principio de la multiplicación (x)

Ejemplo Ilustrativo 4

Si en una carrera de caballos participan 6 caballos, entonces el número de maneras diferentes que pueden ocupar los tres primeros lugares, es:

- A) 80 B) 90 C) 162
D) 160 E) 120

RESOLUCION

Para este lugar, lo puede ocupar cualquiera de los 6

Para este lugar, solo habrá 5 caballos disponibles



1º lugar	2º lugar	3º lugar
----------	----------	----------

Total de maneras= 6 x 5 x 4 = 120

CLAVE “E”

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

¿QUÉ DIFERENCIA HAY?

Normalmente usamos la palabra “combinación” descuidadamente, sin pensar en la importancia del orden de las cosas.



Analiza las siguientes situaciones:



“Mi ensalada de frutas es una mezcla de manzana, uva y fresa”. Pues no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser manzana, uva y fresa ó fresa, uva y manzana, es la misma ensalada.



“La clave de la cerradura es 562”. En esta situación si importa el orden.

No funcionaría 265 ni 625 , tiene que ser exactamente 5 – 6 – 2.

Así que en matemática usamos un lenguaje más preciso.

- ✓ Si el orden en el que ubican los elementos no importa, entonces se trata de un tipo de agrupamiento denominado **combinación**.
- ✓ Si el orden en el que se ubican los elementos importa, entonces se trata de un tipo de agrupamiento denominado **permutación**.
- ✓ Entonces lo arriba mencionado podría llamarse “cerradura de permutación”

**6.- PERMUTACIÓN:**

Son los diferentes ordenamientos que se pueden realizar con parte o todos los elementos de un conjunto.

Veamos cómo se pueden “ordenar” tres amigos en una banca.

Amigos: Romel , José , Ernesto : (R) , (J) , (E)

R	J	E
---	---	---

J	E	R
---	---	---

R	E	J
---	---	---

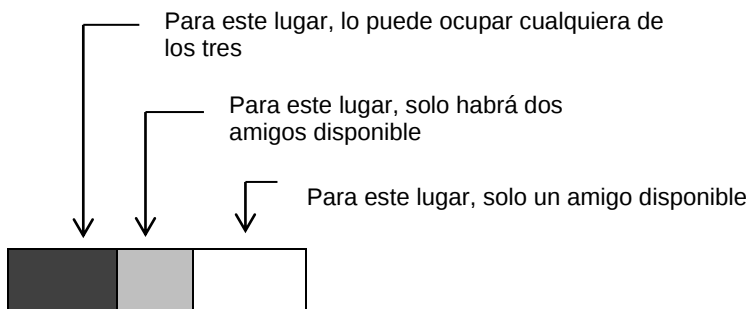
E	J	R
---	---	---

J	R	E
---	---	---

E	R	J
---	---	---

∴ Hay seis ordenamientos diferentes

- ✓ Nos damos cuenta que en una permutación si interesa el orden de sus elementos
- ✓ Se dice que sí interesa el orden de sus elementos cuando .
 $AB \neq BA$
- ✓ Se dice que no interesa el orden de los elementos cuando $AB = BA$
- ✓ También podemos utilizar el principio de multiplicación



$$P(n) = n!$$

Luego : → Donde “n” es la cantidad total de elementos(intervienen todos en el ordenamiento).

6.1.- Permutación lineal:



Son todos los ordenamientos que se pueden realizar con elementos diferentes en una fila o línea recta.

$$P(n) = n!$$

← Interviene la totalidad de elementos en cada ordenamiento

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

← Interviene una parte de los elementos en cada ordenamiento

Ejemplo Ilustrativo 5

El número de maneras diferentes que se podría ubicar en fila cinco amigos si dos de ellos desean estar siempre juntos.

A) 64

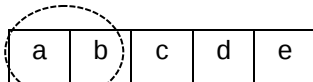
B) 58

C) 48

D) 16

E) 12

RESOLUCIÓN



Entonces
será una
permutación
de
4 elementos

Pero internamente
y sin separarse los
dos amigos

$$P(4)$$

$$4!$$

X

$$P(2)$$

$$2!$$

$$= 48$$

Como siempre estarán
juntos serán considerados
como una sola persona

CLAVE "C"

Ejemplo Ilustrativo 6

De cuantas maneras diferentes que se pueden ubicar 6 personas en una banca con capacidad solo para cuatro personas, si dos siempre estarán en espera.

A) 640

B) 150

C) 480

D) 360

E) 180

**RESOLUCION**

Se permutaran 6 personas tomadas en grupos de 4, es decir:

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{720}{2} = 360$$

Por lo tanto se pueden ubicar de **360**

maneras diferentes.

CLAVE “D”

6.2.- Permutación circular:

Se pide ordenar en grupos de “n” elementos alrededor de una objeto (mesa circular), en estos ordenamientos no hay ni primero ni ultimo: para calcular el número de permutaciones circulares basta con fijar la posición de uno de ellos y los (n – 1) restantes se podrían ordenar de (n – 1)! maneras.

$$PC_n = (n-1)!$$

Ejemplo Ilustrativo 7

El número de maneras diferentes, en que cuatro amigos se podrán ubicar alrededor de una mesa circular es:

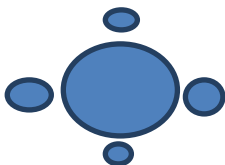
A) 4

B) 5

C) 8

D) 3

E) 6

RESOLUCION

$$PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$$

CLAVE “E”

**6.3.- Permutación con elementos repetidos**

Es el ordenamiento lineal cuyos elementos no son todos distintos entre sí, es decir, hay elementos que se repiten. El número de permutaciones se denotará y calculará, así:

$$P_{\alpha; \theta; \beta \dots}^n = \frac{n!}{\alpha! \times \theta! \times \beta! \dots}$$

Donde α , θ , β , , son las veces que se repite un mismo elemento en un determinado grupo

Ejemplo Ilustrativo 8

El número de maneras diferentes, que se pueden ordenar las letras de la palabra PATATA es:

A) 40

B) 55

C) 80

D) 53

E) 60

RESOLUCION

Se observa que en la palabra PATATA hay letras que se repiten , es decir: $\underbrace{AAA}_3 \underbrace{TT}_2 \underbrace{P}_1$ En total 6 elementos

$$\therefore P_{3,2,1}^6 = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2! \times 1!} = 60$$

Se pueden ordenar de 60 formas diferentes y algunos de estos casos distintos son: TATAPA, TAPATA, TTAAAP, TAAATP, AAATTP, etc.

CLAVE “E”



7.- COMBINACIONES

Son los diferentes grupos que se pueden formar con parte o todos los elementos de un conjunto sin considerar el orden en que son agrupados.

7.1.- COMBINACION SIMPLE:

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se puedan formar con los elementos del conjunto (tomando parte o todos a la vez), considerando que en los grupos los

elementos son diferentes El número de combinaciones se denota y calcula, así:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)! \times k!}$$

Donde $0 \leq k \leq n$

Ejemplo Ilustrativo 9

El número de maneras diferentes, que se pueden seleccionar dos alumnos de un total de cinco es:

A) 10
D) 70

B) 50
E) 60

C) 80

RESOLUCION

Número
de grupos

$$C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! \times 2!} = 10$$

CLAVE “E”

**7.2.- COMBINACIONES CON REPETICIÓN:**

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o todo los elementos de un conjunto, pero considerando que hay elementos que son iguales.

Se denota y calcula, así:

$$CR_r^n = C_r^{n+r-1}$$

Ejemplo Ilustrativo 10

Laura organiza una reunión de despedida por un viaje al extranjero, pero de los diez colegas hay dos que no pueden asistir juntos a la misma reunión. La cantidad de formas diferentes que podrá invitar a seis de ellos es:

A) 128

B) 136

C) 140

D) 144

E) 155

RESOLUCION

los dos amigos no
asisten juntos = TOTAL DE CASOS – los dos amigos
asisten juntos

los dos amigos no
asisten juntos = $C_6^{10} - C_4^8$

los dos amigos no
asisten juntos = $210 - 70 = 140$

CLAVE “C”

**Ejemplo Ilustrativo 11**

Por navidad el coordinador de un curso va a repartir un paneton a cada uno de sus diez colegas. La cantidad de formas diferentes que podrá comprarlos si en la tienda venden solo de 5 marcas diferentes, es:

A) 610

B) 820

C) 720

D) 910

E) 1001

RESOLUCION

Como hay cinco marcas distintas y debe repartir a diez personas entonces:

$$CR_{10}^5 = C_{10}^{14} = \frac{14 \times 13 \times 12 \times 11}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1001$$

Se puede hacer el reparto de 1001 maneras diferentes. **CLAVE “E”**

Ejercicios Resueltos

1.- De A a B hay 6 caminos diferentes y de B a C hay 4 caminos diferentes. El número de maneras se puede hacer el viaje de A a C pasando por B es:

A) 24

B) 120

C) 556

D) 1576

E) 1596

RESOLUCIÓN:

* Para la ida:

De A → B : 6 maneras

De B → C : 4 maneras

maneras A → C, pasando por B, son:

$$6 \times 4 = 24 \text{ maneras}$$



* Para el regreso:

De C $\rightarrow$ B : 4 maneras

De B $\rightarrow$ A : 6 maneras

maneras de C $\rightarrow$ A pasando por B, son:

$$4 \times 6 = 24 \text{ maneras}$$

Como se trata de un viaje redondo o sea de ida y de regreso el número de maneras será:

$$24 \times 24 = 576$$

CLAVE "D"

2.- El número de sonidos distintos que pueden producirse con ocho teclas de piano si se tocan cuatro simultáneamente es:

A) 1680

B) 1860

C) 70

D) 120

E) 720

RESOLUCIÓN:

- No intervienen todos los elementos
- No importa el orden, ya que las teclas de piano se tocan simultáneamente

Se trata de una combinación

$$C_4^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

CLAVE "C"

3.- Una moneda cuyas caras están marcadas con los números 2 y 3 respectivamente es tirada 5 veces. Las maneras en que se obtendrá como suma 12 son:

A) 120

B) 60

C) 130

D) 15

E) 10

RESOLUCIÓN:

Para que la suma sea 12 los resultados deben ser: {2,2,2,3,3}

Para lo cual se aplica la PERMUTACION con repetición:

$$\therefore \# \text{ maneras: } P_{3,2}^5 = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

CLAVE "E"

**RESOLUCIÓN:**

- MADERO : tiene 3 vocales y 3 consonantes

$$\begin{array}{l} \bullet \text{ Vocales (V):} \\ \bullet \text{ Consonantes (C):} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{CVCVCV} \quad \text{ó} \quad \text{CVVCVC} \\ \text{VCVCVC} \quad \text{CVCVCV} \end{array} \right.$$
$$\frac{\quad}{2 \times (3! \times 3!)} + \frac{\quad}{2 \times (3! \times 3!)}$$

TOTAL: 144

CLAVE “B”

- 6.- En el departamento de contabilidad de la Universidad Nacional de Trujillo hay 25 empleados, 4 de ellos son auditores, Las maneras que pueden formarse equipos de 3 personas con un auditor por lo menos es:

- A) 970
- B) 790
- C) 670
- D) 908
- E) 345

RESOLUCIÓN:

El total equipos (grupos) es: C_3^{25}

El total de equipos donde no aparece ningún auditor es: C_3^{21} , pero incluyendo un analista por lo menos es:

$$C_3^{25} - C_3^{21} = 970 \text{ maneras ó formas.}$$

CLAVE “A”

- 7.- El número de maneras distintas, en que seis atletas pueden llegar a la meta en una carrera de 500 m. planos, si a lo más, pueden empatar tres de ellos, es:

- A) 2800
- B) 3800
- C) 3000
- D) 3900
- E) 2040

**RESOLUCIÓN:**

Tenemos tres opciones:

- Que nadie empate: $P(6) = 6! = 720$
- Que empaten dos: $C_2^6 \times P(5) = \frac{6 \times 5}{2} \times 5! = 1800$
- Que empaten tres: $C_3^6 \times P(4) = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \times 4! = 480$

Por lo tanto el total de maneras diferentes es:

$$720 + 1800 + 480 = 3000$$

CLAVE “C”

Ejercicios Propuestos

1. En un torneo de ajedrez se jugaron en total 304 partidas. Si en la primera rueda jugaron todos contra todos y en la segunda sólo jugaron la tercera parte, también todos contra todos. Entonces el número de participantes en dicho torneo, es:

A) 10	B) 12	C) 18
D) 20	E) 24	
2. Willy tiene 6 pantalones, 4 camisas y 5 pares de zapatos, todos de diferente color entre sí. Si la camisa celeste siempre lo usa con el pantalón azul y éste con ninguna otra camisa, Entonces el número de maneras diferentes que puede vestirse Willy es:

A) 65	B) 75	C) 80
D) 90	E) 95	



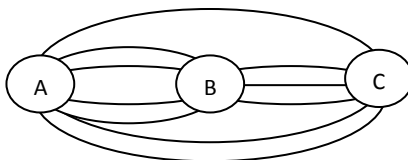
3. Los números de cinco cifras existen tal que el producto de sus cifras sea igual a 18 son:
- A) 70 B) 90 C) 100
D) 110 E) 120
4. Con las letras de la palabra “ MURCIÉLAGO “, el número de palabras diferentes (sin interesar el sentido) que se podrán formar de tal manera que esté formada por dos vocales y dos consonantes, es:
- A) 100 B) 120 C) 240
D) 12000 E) 2400
5. El número de maneras diferentes que pueden ubicarse correctamente $2n$ personas alrededor de una mesa circular, de modo que “ n ” de ellas siempre queden juntos, es:
- A) $(2n-1)!$ B) $(n-1)!$ C) $(2n)!$
D) $2n(n-1)!$ E) $(n!)^2$
6. Dos profesoras asisten a una capacitación en la UNT. Si dicha capacitación se dicta en 4 facultades de cinco aulas cada una con 10 carpetas de dos asientos, entonces el número de formas diferentes que se pueden ubicar, si deben sentarse en la misma carpeta, es:
- A) 600 B) 500 C) 250
D) 460 E) 400
7. De un grupo de cinco varones y cinco mujeres se van a sentar en una banca de 10 asientos, entonces el número de maneras diferentes que podrán sentarse si las personas del mismo sexo no deben estar juntas, además Juan siempre tiene que estar junto y entre Rocío y Flor, es:
- A) $3^2 (4!)$ B) $2! 3! 4!$ C) $4^4 \cdot 3^2$
D) $6 \times 8 \times 12$ E) $2! 4^3 \times 3^4$



8. En el CEPUNT, durante tres días consecutivos se desarrollarán seminarios de Aptitud académica (aulas 1; 2 y 3 R.M. ; aulas 4; 5 y 6 R.L. y aulas 7; 8 y 9 R.V.) pues cada aula tiene 20 mobiliarios y cada mobiliario tiene capacidad para cinco alumnos. Si Anita, Gloria y Brenda desean escuchar en la misma carpeta y siempre juntas los seminarios, entonces el número de maneras que podrían ubicarse es:

A) $3!5!$ B) $9 \times 6!$ C) $6 \times 5!$
D) $4! 5!$ E) $6 \times 6!$

9. El número de maneras diferentes que una persona puede ir (según el gráfico) de A a C y regresar al punto A sin retornar por ningún tramo camino de ida, es:



A) 144 B) 148 C) 150
D) 158 E) 2884

10. Si a la catedral ingresan “n” parejas de novios, acompañados de la madre de las novias, que son hermanas, además encuentran “ $2n + 1$ ” asientos juntos en una misma fila, entonces el número de maneras diferentes que pueden sentarse con la condición de que la madre no se siente al medio de alguna de las parejas es:

A) $2n(2n-1)!$ B) $n(2n)!$ C) $2n(2n)!$
D) $n! 2^{n+1}$ E) $(n + 1)! \cdot 2^n$

11. En una urna hay 4 fichas numeradas del 0 al 3 y en otra urna hay 5 fichas numeradas del 5 al 9. Si se saca una ficha de la primera urna y otra de la segunda urna, con los números de las dos fichas se forma un numeral de dos cifras, entonces los valores posibles de éste numeral son:

A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 40



12. Con todas las letras de la palabra "MARGARITO", el número de ordenamientos diferentes que se pueden obtener, de modo que las vocales se encuentren siempre juntas, es:
- A) $4 \times 5!$ B) $5 \times 6!$ C) $6 \times 7!$
D) $7 \times 5!$ E) $6 \times 6!$
13. Si en una reunión hay ocho personas, entonces el número de maneras que se pueden ordenar 5 de ellas alrededor de una mesa, si Toño y Willy no pueden estar en la mesa a la vez, es:
- A) 720 B) 800 C) 864
D) 900 E) 924
14. ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen por lo menos un número impar ?
- A) 500 B) 6480 C) 6500
D) 8000 E) 8500
15. Juan va a la tienda a comprar 7 refrescos, si la dueña de la tienda le ofrece 4 sabores diferentes, entonces el número de maneras diferentes que puede comprar los 7 refrescos es :
- A) 35 B) 50 C) 70
D) 90 E) 120
16. El número de maneras diferentes que pueden sentarse "x" personas en una fila de "m" asientos ($x < m$), si los "n" asientos libres deben estar siempre juntos es:
- A) $(m - n)!$ B) $(m - n - 1)!$ C) $2(m + n)!$
D) $(m - n + 1)!$ E) $2(m - n - 1)!$
17. Si se lanza una moneda 10 veces, entonces el número de maneras diferentes que se puede obtener 5 caras y 5 sellos , es:
- A) 245 B) 248 C) 252
D) 235 E) 225



- 18 Una persona comienza a numerar boletos a partir del número 1 801 y se detiene en un número de cuatro cifras que representa la cantidad de dígitos utilizados, entonces la suma de las cifras del último número escrito es:
- A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 14
- 19 Se tiene 10 vasos descartables de un mismo tipo, si 6 de ellos están llenos de gaseosa y los 4 restantes con agua, entonces el número de maneras diferentes que se pueden ordenar linealmente los vasos llenos, si dos vasos conteniendo gaseosa y agua tienen que estar siempre juntos, es:
- A) 608 B) 808 C) 908
D) 1008 E) 1108
- 20 ¿Cuántos números de cinco cifras existen, en el sistema notario, tal que su producto de cifras sea par o cero?
- A) 17 200 B) 32 200 C) 35 440
D) 50 440 E) 51 464

**CLAVES**

1. E	2. C	3. A	4. E	5. E
6. E	7. C	8. B	9. C	10. E
11. D	12. E	13. C	14. E	15. E
16. D	17. C	18. A	19. D	20. E

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

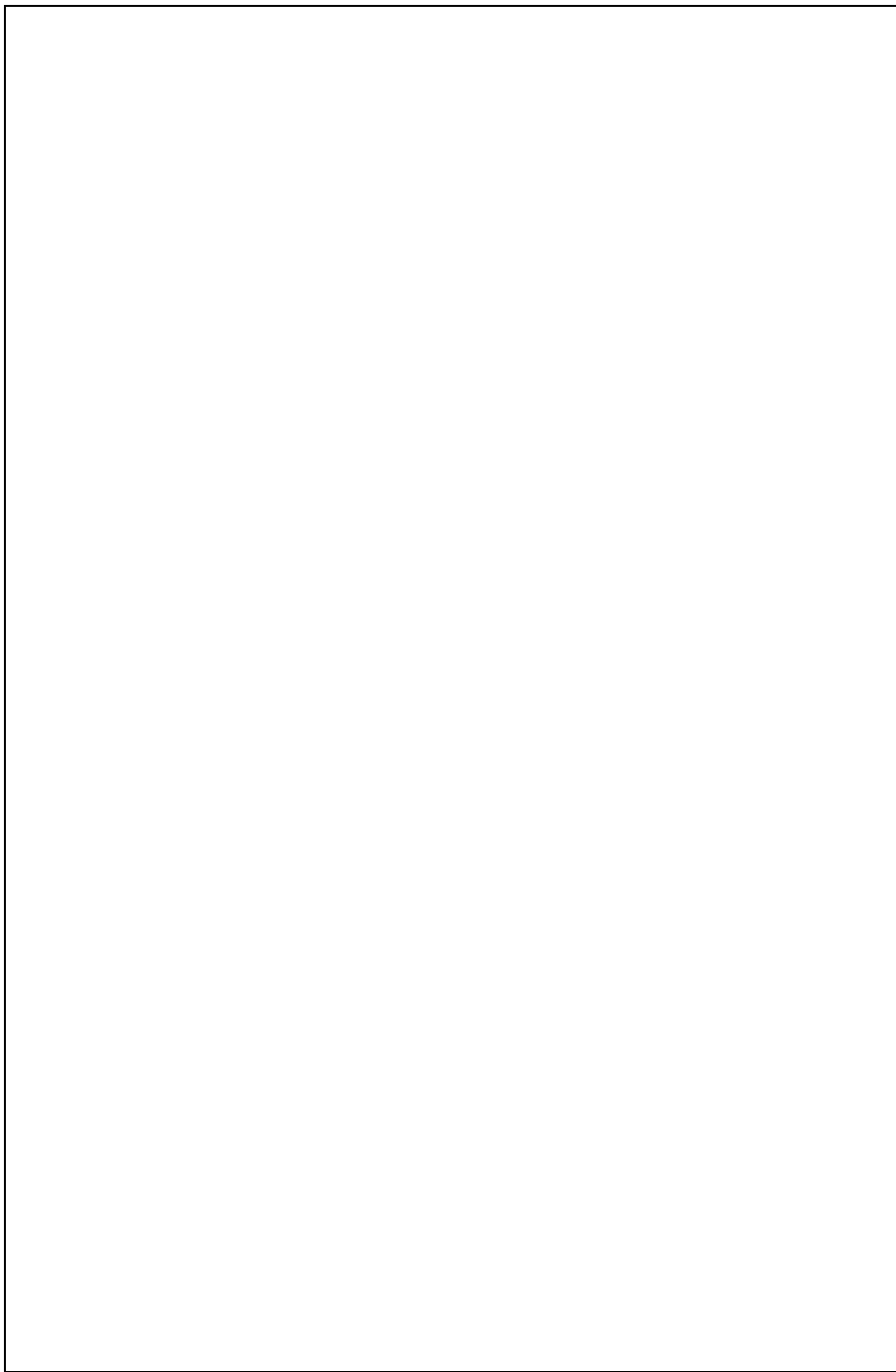
Academia Cesar Vallejo (2013) Libro de Problemas (2ª edición). Perú: Lumbreras.

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Marian Wisniewski, P. y Velasco Sotomayor, G. (2010) Problemario de Probabilidad (2ª edición). México: International Thomson.

Quispe Pauyacc, A. (2006) Potenciación: Teoria y problemas (2ª edición). Perú: Cuzcano.

Yáñez Diaz, J. y Yáñez Díaz, J. (2015) Razonamiento Matemático Teorico Práctico (1ª edición). Perú: Aplicación Gráfica S.R.L.



**SEMANA 8****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Resolver problemas usando las definiciones y propiedades de la teoría de la probabilidad
2. Interpretar adecuadamente las definiciones y propiedades de la teoría de la probabilidad y aplicarlos en la solución de problemas.



LAS MATEMATICAS Y EL JUEGO

La historia de la probabilidad comienza en el siglo XVII cuando Pierre Fermat y Blaise Pascal tratan de resolver algunos problemas relacionados con los juegos de azar. Aunque algunos marcan sus inicios cuando Cardano en 1520 publica El Libro de los Juegos de Azar (aunque no fue publicado hasta más de un siglo después, sobre 1660) y no es hasta dicha fecha que comienza a elaborarse una teoría aceptable sobre los juegos.

Durante el siglo XVIII, debido muy particularmente a la popularidad de los juegos de azar, el cálculo de probabilidades tuvo un notable desarrollo sobre la base de la anterior definición de probabilidad. Destacan en 1713 el teorema de Bernoulli y la distribución binomial, y en 1738 el primer caso particular estudiado por De Moivre.



A mediados del siglo XIX, un fraile agustino austríaco, Gregor Mendel, inició el estudio de la herencia, la genética, con sus interesantes experimentos sobre el cruce de plantas de diferentes características. Su obra, La matemática de la Herencia, fue una de las primeras aplicaciones importantes de la teoría de probabilidad a las ciencias naturales. Desde los orígenes la principal dificultad para poder considerar la probabilidad como una rama de la matemática fue la elaboración de una teoría suficientemente precisa como para que fuese aceptada como una forma de matemática.

A principios del siglo XX el matemático ruso Andrei Kolmogorov la definió de forma axiomática y estableció las bases para la moderna teoría de la probabilidad. Esta teoría que se inició con las observaciones sobre un juego de dados, terminó convirtiéndose en una valiosa rama de la matemática.



1. **EXPERIMENTO ALEATORIO**

Su concepto hace referencia a la representación de un proceso cuyo resultado o resultados dependen del azar es decir que no pueden predecirse. El término aleatorio indica que no se conoce con exactitud antes de su realización. Por convenio lo representaremos con la letra griega ϵ .



Como con regularidad utilizaremos el término azar entonces es necesario conocer su procedencia. La palabra azar proviene del árabe *al zar* que significa *los dados*, entonces podemos concebir al experimento aleatorio como la representación de un proceso cuyos resultados dependen del azar, por lo tanto están fuera de cualquier control determinista.

Cabe precisar que un fenómeno no determinístico (fenómeno estocástico) tiene resultados únicos y/o previsibles que resultan de experimentos realizados bajo condiciones determinadas y por lo tanto poseen un conjunto de alternativas y esto ocurre cuando, por ejemplo, se lanza una moneda o un dado.

En cambio un fenómeno determinístico tiene un resultado establecido, por ejemplo la experiencia de calentar el agua a 100 grados Celsius, al nivel mar, para obtener vapor tiene un único resultado previsible.

2. **ESPACIO MUESTRAL**

El espacio muestral es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio y puede ser finito o infinito. También es denominado como espacio de muestra y convencionalmente se representa con la letra griega Ω .

Para el cálculo de la cantidad de elementos del espacio muestral será necesario que recuerdes los temas referidos a los principios de adición y multiplicación y análisis combinatorio.

3. **EVENTO O SUCESO**

El evento o suceso es cualquier subconjunto del espacio muestral asociado a un experimento aleatorio. Los eventos son, por lo tanto, sinónimos de conjuntos.

Entonces en cada situación particular el espacio muestral es el conjunto universal en tanto que sus eventos son los subconjuntos, incluyendo el conjunto vacío $\emptyset$, al cual se le conoce como evento imposible.



Para nombrarlos utilizaremos convencionalmente las letras mayúsculas de nuestro alfabeto (A, B, C,..., X, Y o Z).

Para el cálculo de la cantidad de elementos de un evento será necesario que recuerdes los temas referidos a los principios de adición y multiplicación y análisis combinatorio.

4. FUNDAMENTOS AXIOMÁTICOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDADES

Estableceremos el concepto de probabilidad de un evento de manera indirecta, es decir, usando los siguientes axiomas:

Axioma 1.- Si A es un evento cualquiera entonces la probabilidad de A, denotado por $P(A)$, es un número real no negativo y no mayor que 1, es decir que:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axioma 2.- Si A y B son dos eventos mutuamente excluyentes entonces se concluye que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Axioma 3.- Si Ω denota al espacio muestral entonces:

$$P(\Omega) = 1$$

A partir de estos axiomas, relacionándolas con las propiedades de la teoría de conjuntos mencionaremos algunos teoremas y corolarios cuyas demostraciones son elementales.

Teorema 1.- Si $\emptyset$ es el conjunto vacío entonces $P(\emptyset) = 0$

Teorema 2.- Para cualquier evento A de un espacio muestral se concluye que:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

Teorema 3.- Para cualesquiera eventos A y B de un espacio muestral, se verifica la igualdad:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Del cual se desprende el siguiente corolario para los conjuntos A, B y C, donde el equivalente de $P(A \cup B \cup C)$ es:

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

De modo general, la probabilidad de la unión de “n” eventos cualesquiera se obtiene sumando las probabilidades de eventos sencillos restando las intersecciones dobles, adicionándoles las intersecciones triples, adicionando las intersecciones cuádruples, etc., es decir, alternando los signos más y menos en cada conjunto de intersecciones.

Teorema 4.- Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$

Teorema 5.- La probabilidad de la unión de “n” eventos cualesquiera de un espacio muestral es menor o igual que la suma de las probabilidades sencillas.

Del cual se desprende el corolario referido a “n” eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Asimismo podemos concebir la probabilidad como la cuantificación del grado de incertidumbre que se obtiene al realizar un experimento aleatorio y su valor se calcula dividiendo los cardinales del evento y espacio muestral respectivamente.

Así:

$$P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

También lo puedes recordar precisando que es el cociente entre los casos favorables (evento) y el total casos (espacio muestral).

**Ejemplo Ilustrativo 1**

Luis dispone de dos dados de distinto color y los lanza sobre una mesa plana. La probabilidad de obtener como producto un número impar al multiplicar los valores de las caras superiores es:

- A) $1/3$
- B) $1/4$
- C) $2/7$
- D) $5/12$
- E) $7/18$

RESOLUCION

El experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de dos dados de distinto color D_1 y D_2 , usaremos el siguiente cuadro para ordenar la información y luego construiremos su espacio muestral:

D_1	1	2	3	4	5	6
D_2	1	2	3	4	5	6

El espacio muestral estará formado por pares ordenados, así:

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); \dots; (6,4); (6,5); (6,6)\}$$

De donde se puede concluir por el principio de multiplicación que la cantidad de elementos es 36, es decir:

$$n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$$

Asimismo el evento que lo denotaremos por A referido a “obtener como producto un número impar” consiste en elegir los pares ordenados de componentes impares pues debes recordar que el producto será impar siempre y cuando los factores sean impares. Por lo tanto el evento se genera cuando usamos solo impares. Así:

D_1	1	3	5
D_2	1	3	5

El evento es el siguiente:

$$A = \{(1,1); (1,3); (1,5) \dots; (5,1); (5,3); (5,5)\}$$

De donde se puede concluir que la cantidad de elementos es 9, es decir:

$$n(A) = 9$$

Finalmente aplicando el concepto de probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

CLAVE “B”

**Ejemplo ilustrativo 2:**

Un jugador dispone de dos dados iguales y los lanza sobre una mesa plana. La probabilidad de obtener como producto un número impar al multiplicar los valores de las caras superiores es:

- A) $1/3$
- B) $1/4$
- C) $2/7$
- D) $5/12$
- E) $7/18$

RESOLUCION

Comparando con la información del problema anterior el cambio de “dados distintos” por “dados iguales” es una condición muy importante pues el espacio muestral será diferente ya que los pares ordenados (1,3) y (3,1) son distintos cuando los dados son distintos y son iguales cuando los dados son iguales. Es importante recordar que si en un conjunto hay elementos repetidos, sólo se considera una sola vez.

En este caso el espacio muestral lo obtendremos del cuadro:

		DADO					
D A D O		1	2	3	4	5	6
	1	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	2		✓	✓	✓	✓	✓
	3			✓	✓	✓	✓
	4				✓	✓	✓
	5					✓	✓
	6						✓

Y finalmente así:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); \\ (1,6); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); \\ (2,6); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); \\ (4,4); (4,5); (4,6); (5,5); (5,6); \\ (6,6) \end{array} \right\}$$



De donde se puede concluir que la cantidad de elementos es 21, es decir:

$$n(\Omega) = 21$$

Asimismo el evento asociado tiene como elementos:

$$\Omega = \{(1,1); (1,3); (1,5); (3,3); (3,5); (5,5)\}$$

De donde se puede concluir que la cantidad de elementos es 6, es decir:

$$n(A) = 6$$

Finalmente aplicando el concepto de probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

CLAVE “C”

5. TIPOS DE SUCESOS Y EL CÁLCULO DE PROBABILIDAD

5.1 SUCESO IMPOSIBLE.-

Aquel suceso que nunca ocurre. Es decir, es el suceso igual al conjunto vacío $\emptyset$.

Entonces:

$$P(\emptyset) = 0$$

Ejemplo Ilustrativo 3

¿Cuál es la probabilidad de obtener un número negativo en el lanzamiento de un dado correcto?

RESOLUCION

El espacio muestral se conforma de seis resultados posibles diferentes y el evento no tiene elementos, es decir, es el conjunto vacío. Por lo tanto:

$$P(\text{negativo}) = \frac{0}{6} = 0$$

5.2 SUCESO SEGURO

Aquel suceso que siempre ocurre. Es decir, es el suceso igual al espacio muestral Ω .

Entonces:

$$P(\Omega) = 1$$

**Ejemplo Ilustrativo 4:**

En las elecciones presidenciales de un cierto País se presentan cinco candidatas. ¿Cuál es la probabilidad de elegir una mujer como presidente?

RESOLUCION

El espacio muestral se conforma de cinco elementos, que son las posibles elecciones de cada una de ellas. El evento precisa que debe ser mujer por lo tanto puede ser cualquiera de las postulantes. Por lo tanto:

$$P(\text{mujer}) = \frac{5}{5} = 1$$

5.3 SUCECOS SIMPLES:

Son aquellos que tienen una probabilidad de ocurrencia no relacionada con otro suceso.

5.4 SUCECOS COMPUESTOS.- Aquellos que se componen de dos o más sucesos.

Pueden ser:

a) SUCECOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES.-

Cuando dos o más sucesos no suceden a la vez.

Es decir:

$$M \cap N = \phi$$

Por lo tanto:

$$P_{(M \cup N)} = P_{(M)} + P_{(N)}$$

b) SUCECOS INDEPENDIENTES.-

Dos eventos son independientes si la probabilidad de ocurrencia de una no ve afectada por la probabilidad de la otra.

Ejercicios Resueltos

1. La probabilidad de que Pedro anote un gol al patear es de 0,3. La probabilidad de que anote por lo menos un gol al patear 3 penales es:
- A) 0,569 B) 0,458 C) 0,657
D) 0,756 E) 0,359

**RESOLUCIÓN**

- Los eventos:

A_1 : Anotar un gol en el 1er penal:

$$\rightarrow P(A) = \frac{3}{10}$$

A_2 y A_3 : Similares en el segundo y tercer penal

$$\rightarrow P(A_2) = P(A_3) = \frac{3}{10}$$

- Se desea que se cumpla:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

$$\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - (1 - P(A_1)) \times (1 - P(A_2)) \times (1 - P(A_3))$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times \left(1 - \frac{3}{10}\right) \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{7}{10}\right) \left(\frac{7}{10}\right)$$

$$= 1 - 0,343$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbf{0,657} \quad \text{CLAVE "C"}$$

2. En una carrera de caballos, el caballo A tiene la apuesta 3:1 a su favor, mientras que el caballo B las tiene 4: 1 en su contra. La probabilidad que cualquiera de estos caballos gane es:

A) 0,95

B) 0,85

C) 0,65

D) 0,75

E) N.A.

RESOLUCIÓN

- Cuando se expresan las apuestas, aparece una relación entre las posibilidades a favor y en contra de que se produzca un evento, así:

- "3: 1 a su favor, significa que:

Hay 3 posibilidades de ganar y 1 posibilidad de perder, en total se mencionan 4 posibilidades, diremos que:

$$P(\text{Gane A}) = \frac{3}{4}; P(\text{Gana B}) = \frac{1}{5}$$

- Se desea que gane A o B, esto es $A \cup B$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} = 0,95$$

CLAVE "A"



3. Se lanzan 3 dados simultáneamente. Señale cuántos elementos tendrá el evento en el cual la suma de los puntajes de los tres dados sea menor a 5.

A) 8 B) 6 C) 4
D) 9 E) 10

RESOLUCIÓN

- $\Omega = \{(1; 1; 1); (1; 1; 2); (1; 1; 3); \dots; (6; 6; 6)\}$

Cada elemento es de la forma:

(a; b; c) donde $a; b; c \leq 6$

- Elemento es: La suma de los puntajes es menor que 5.
- De Ω , deducimos que lo mínimo que puede sumar es 3 y está dado por (1; 1; 1)
- Para que sumen 4, se cumple que:
 $4 = a+b+c$, las formas son:
(1; 1; 2); (1; 2; 1); (2; 1; 1)

$$\therefore n(A) = 4$$

CLAVE "C"

4. De una baraja de 52 cartas, se extraen al azar 5 cartas. La probabilidad de que 3 de ellas sean negras y las otras no es :
- 5.

A) $\frac{1525}{5998}$ B) $\frac{1725}{5988}$ C) $\frac{1623}{4999}$
D) $\frac{1625}{4998}$ E) $\frac{1505}{4898}$

RESOLUCIÓN

- De las cartas:

- 26 son negras y 26 son rojas

- Luego, elegir 5 cartas de 52 se tendrá:

$$C_5^{52} = 4998 \text{ formas diferentes}$$



- Escoger 3 cartas negras y 2 rojas

$$C_3^{26} \times C_2^{26} = 1625$$

$$\therefore P[3N \text{ y } 2R] = \frac{1625}{4998}$$

CLAVE “D”

6. Luis dispone de dos dados de distinto color y los lanza sobre una mesa plana. La probabilidad de obtener como producto un número impar al multiplicar los valores de las caras superiores es:
- A) 1/3
B) 1/4
C) 2/7
D) 5/12
E) 7/18

RESOLUCIÓN

El experimento aleatorio consiste en el lanzamiento de dos dados de distinto color

D_1 y D_2 , usaremos el siguiente cuadro para ordenar la información y luego construiremos su espacio muestral:

D_1	1	2	3	4	5	6
D_2	1	2	3	4	5	6

El espacio muestral estará formado por pares ordenados, así:

$$\Omega = \{(1,1); (1,2); (1,3); \dots; (6,4); (6,5); (6,6)\}$$

De donde se puede concluir por el principio de multiplicación que la cantidad de elementos es 36, es decir:

$$n(\Omega) = 6 \times 6 = 36$$

Asimismo el evento que lo denotaremos por A referido a “obtener como producto un número impar” consiste en elegir los pares ordenados de componentes impares pues debes recordar que el producto será impar siempre y cuando los factores sean impares. Por lo tanto el evento se genera cuando usamos solo impares. Así:

D_1	1	3	5
D_2	1	3	5



El evento es el siguiente:

$$A = \{(1,1); (1,3); (1,5) \dots; (5,1); (5,3); (5,5)\}$$

De donde se puede concluir que la cantidad de elementos es 9, es decir:

$$n(A) = 9$$

Finalmente aplicando el concepto de probabilidad:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

CLAVE“B”

7. Si se dispone de manzanas, papayas , naranjas, fresas , maracuyás, plátanos y sandias , la probabilidad que la preparar un jugo al azar se utilice plátano o maracuyá es:

A) $59/127$

B) $28/127$

C) $31/127$

D) $96/127$

E) $99/127$

RESOLUCIÓN

EL espacio muestral está compuesto por la cantidad máxima de jugos:

$$C_1^7 + C_2^7 + C_3^7 + \dots + C_7^7 = 2^7 - 1 = 127$$

$$n(\Omega) = 127$$

Calculamos ahora la cantidad de jugos que no tiene ni plátano ni maracuyá que es lo mismo que calcular la cantidad total de jugos con las cinco frutas restantes:

$$C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 = 2^5 - 1 = 31$$

$$n(x^c) = 31$$

$$\text{Finalmente : } P(x) = 1 - \frac{31}{127} = \frac{96}{127}$$

**CLAVE “D”**

8. Un lote de 50 tornillos contiene 2 defectuosos. Si se prueban los tornillos uno tras otro, la probabilidad que el último defectuoso se encuentre en la tercera prueba es:

A) $6/1675$ B) $4/755$ C) $3/1525$ D) $1/250$ E) $2/1225$ **RESOLUCIÓN**

Total de tornillos : 50

Defectuosos (D): 2

Buenos (B) : 48

La probabilidad pedida es:

$$P(x) = \frac{\overbrace{48}^B}{50} \times \frac{\overbrace{2}^D}{49} \times \frac{\overbrace{1}^D}{48} + \frac{\overbrace{2}^D}{50} \times \frac{\overbrace{48}^B}{49} \times \frac{\overbrace{1}^D}{48}$$

$$P(x) = \frac{2 \times 48 \times 2 \times 1}{50 \times 49 \times 48} = \frac{2}{1225}$$

CLAVE “E”**Ejercicios Propuestos**

1. De una baraja de 52 cartas se extrae una carta. La probabilidad de obtener una carta de corazones con una valor menor que 7 o con un valor mayor que 10 es:
- A) $3/26$ B) $3/52$ C) $9/1352$
D) $9/52$ E) $1/9$
2. Se tiene una baraja de 52 cartas; la probabilidad de que al extraer una de estas al azar, esta sea 8 o figura negra es:
- A) $1/13$ B) $1/2$ C) $15/26$
D) $1/26$ E) $7/13$



3. Si se lanza una moneda dos veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos veces cara?
- A) $1/2$ B) $1/4$ C) 1
D) $3/4$ E) $3/8$
4. Si se lanza un dado correcto dos veces en forma sucesiva, La probabilidad de que ambos resultados sean de puntaje 1 es:
- A) $1/3$ B) $5/36$ C) $1/36$
D) 1 E) $1/6$
5. En el campeonato mundial de Atletismo, compiten 10 atletas en la carrera de 500 m planos. Si un país cuenta con 4 participantes La probabilidad de que sus atletas obtengan sus 3 primeros lugares es:
- A) $1/15$ B) $3/17$ C) $1/30$
D) $3/21$ E) $23/72$
6. Se tiene cinco cajas que contienen cada una 100 bujías. Dos de las cajas tienen 10 bujías defectuosas cada una, las otras dos 5 bujías cada una y la última 2 bujías defectuosas. Si se selecciona al azar una de estas cajas y de ella se toma una bujía, la cual resultó defectuosa, La probabilidad de que la bujía provenga de la caja que tiene el 2 % de bujías defectuosas es:
- A) $8/125$ B) $1/250$ C) $16/125$
D) 1 E) $1/16$
7. Si se lanzan dos dados, La probabilidad de obtener una suma mayor que 10 es:
- A) $11/12$ B) $2/5$ C) $5/6$
D) $1/12$ E) $13/15$



8. Entre los estudiantes de una universidad se observa que el 8% de los hombres y el 5% de las mujeres tienen ojos verdes. Además el 40% de los estudiantes son mujeres. Si se elige al azar un estudiante y se observa que tiene ojos verdes, La probabilidad que sea mujer es:
- A) $\frac{5}{17}$ B) $\frac{19}{39}$ C) $\frac{10}{39}$
D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{6}{13}$
9. Javier y cuatro amigos se ubican en una fila. La probabilidad de que Javier quede en el centro es:
- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{3}{10}$
D) $\frac{4}{7}$ E) $\frac{3}{13}$
10. La probabilidad de que Paolo anote un gol al patear un penal es 0,3. La probabilidad de que anote por lo menos un gol al patear 3 penales es:
- A) 0,9 B) 0,343 C) 0,027
D) 0,27 E) 0,657
11. Una empresa quiere contratar a un empleado de los tres empleados que se presentaron. Si los candidatos fueron Manuel, Narciso y Pedro, de los cuales se sabe que la probabilidad de que Manuel sea contratado es de 7 contra 5 y la de Narciso es de 1 contra 3, La probabilidad que tiene Pedro de ocupar la vacante es:
- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{10}$ E) $\frac{1}{6}$



12. En el CEPUNT se elige un equipo de voleibol de un grupo de 7 mujeres y 3 varones, entonces, la probabilidad de que dicho equipo no sea mixto es:
- A) $1/30$ B) $29/30$ C) $1/6$ D) $1/25$ E) $1/9$
13. Una moneda se lanza 6 veces. La probabilidad de que se obtenga cara en los lanzamientos primero y en el último es:
- A) $1/3$ B) $1/4$ C) $3/4$ D) $2/3$ E) $1/2$
14. En un aula del Cepunt, el 70% de los estudiantes son varones, además el 5% de los varones y el 3% de las mujeres postulan a Farmacia. Si se elige al azar dos alumnos de los cuales uno de ellos postula a farmacia, La probabilidad de que éste sea varón es:
- A) $9/44$ B) $9/22$ C) $18/473$
D) $1/20$ E) N.A.
15. Si se tienen “x” libros de matemáticas y 2 de historia, ordenados en un estante. Entonces la probabilidad de que los libros de historia sean separados por los “x” libros de matemáticas, es:
- A) $2/x+2$ B) $1/(x+1)$ C) $2/(x+2)$
D) $2/[(x+2)(x+1)]$ E) $2/(x+1)$
16. Si en una empresa se recepcionaron los expedientes de 12 personas (5 varones y 7 mujeres) para ser evaluados. Si se acepta a cuatro de ellos, entonces la probabilidad de que el grupo aceptado se a mixto es:
- A) $3/89$ B) $1/99$ C) $91/99$
D) $9/89$ E) $4/99$



17. Si Wilson y Elmer se alinean al azar en una fila con 6 amigos más, entonces la probabilidad de que Wilson y Elmer no estén juntos es:
- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{5}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{3}{4}$
18. En una urna se tienen cinco esferas azules, numeradas del 1 al 5 y seis esferas rojas numeradas del 1 al 6. Si a una persona con los ojos vendados se le hace sacar dos esferas de esa urna, entonces, la probabilidad de obtener una esfera azul y una roja cuya suma sea 8 es:
- A) $\frac{1}{11}$ B) $\frac{8}{55}$ C) $\frac{4}{55}$ D) $\frac{3}{11}$ E) $\frac{1}{55}$
19. Teniendo en cuenta el primer día de la semana de un lunes 01 de febrero de un año no bisiesto. La probabilidad de que Wiston al salir con Carmen dos días de febrero, estos sean consecutivos es:
- A) $\frac{5}{16}$ B) $\frac{9}{13}$ C) $\frac{3}{51}$ D) $\frac{1}{14}$ E) $\frac{4}{63}$
20. Sobre una mesa hay 20 tornillos, de los cuales 5 son defectuosos. La probabilidad de que al coger al azar tres tornillos, todos sean defectuosos es:
- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{20}$ C) $\frac{3}{100}$ D) $\frac{1}{114}$ E) $\frac{3}{5}$

**CLAVES**

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. D | 2. E | 3. B | 4. C | 5. C |
| 6. E | 7. D | 8. A | 9. A | 10. E |
| 11. E | 12. A | 13. B | 14. D | 15. D |
| 16. B | 17. C | 18. C | 19. D | 20. D |

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

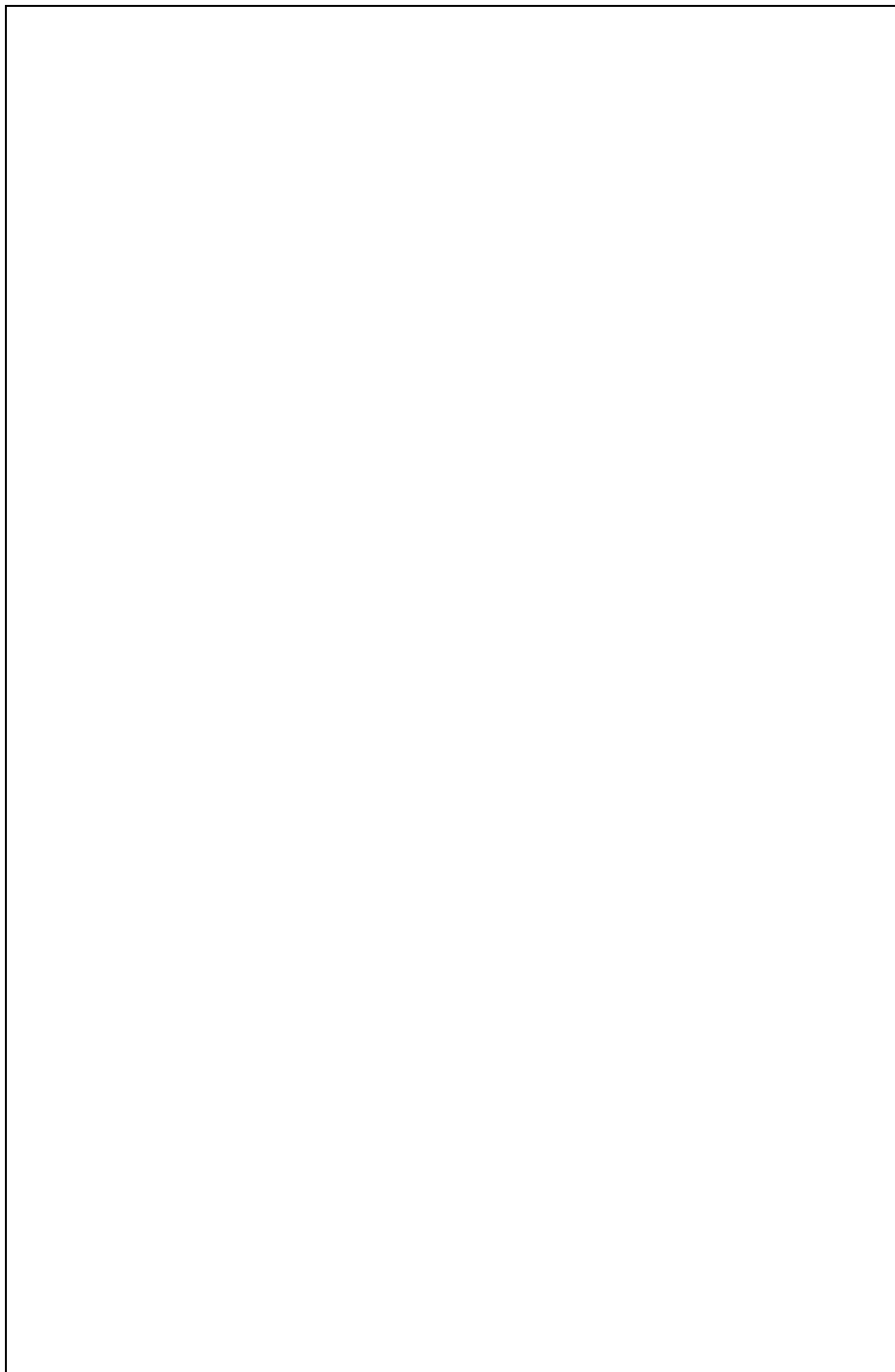
Academia Cesar Vallejo (2013) Libro de Problemas (2ª edición). Perú: Lumbreras.

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Marian Wisniewski, P. y Velasco Sotomayor, G. (2010) Problemario de Probabilidad (2ª edición). México: International Thomson.

Quispe Pauyacc, A. (2006) Potenciación: Teoria y problemas (2ª edición). Perú: Cuzcano.

Yáñez Díaz, J. y Yáñez Díaz, J. (2015) Razonamiento Matemático Teorico Práctico (1ª edición). Perú: Aplicación Gráfica S.R.L.



**SEMANA 9****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Encontrar y asignar formas de medir las variaciones de magnitudes considerando un patrón de medida.
2. Observar que los valores de una magnitud está dependiendo de los valores de otras magnitudes
3. Resolver problemas sobre magnitudes proporcionales usando la regla de tres simple o compuesta



MIDIENDO LA VARIACIÓN

Al estudiar los fenómenos que se producen en la naturaleza, observamos que muchos de ellos sufren variación: la masa, la longitud, el volumen, el tiempo, etc. ... Los cuales considerando una medida de patrón puede ser medida según su variación.

Por ejemplo 25 gramos, 9 metros, 45 litros, 4 horas , 6 horas diarias, 45 metros cuadrados, etc...

Así también se puede considerar al número de obreros, obra , eficiencia, dificultad en hacer la obra, etc, que pueden ser medidas y sufrir variación.



Entonces observamos que todo aquello que sufre variación, la cual puede ser medida, se denomina magnitud y al resultado de dicha medida se le denomina cantidad (valor).

Magnitudes	Cantidad (valor)
Longitud	75 metros
Volumen	59 litros
Tiempo	0,25 segundos
Número de obreros	12 obreros
Número de h/d	8 h/d
Obra	30m ³ de zanja

Este capítulo permitirá expresar la relación entre dos o más magnitudes usando como medio sus medidas y te planteará una regla práctica denominada regla de tres.

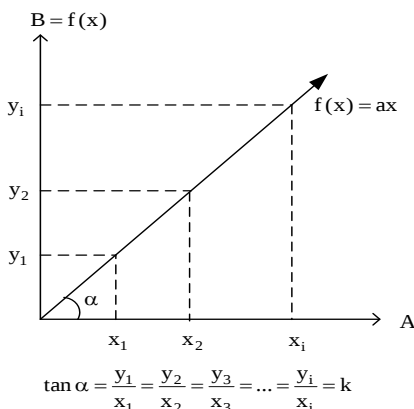


1. MAGNITUDES PROPORCIONALES

Asumiremos que 2 magnitudes son proporcionales cuando al variar uno de ellos, también el otro varía en la misma proporción.

1.1 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (D.P.)

Dos magnitudes A y B serán directamente proporcionales cuando al **aumentar** o **disminuir** los valores de una de ellas los valores de la otra también **aumentan** o **disminuyen** respectivamente en la misma proporción. En general tenemos:



Conclusiones: Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando:

- El COCIENTE de cada par de valores corresponden siempre a una misma constante.
- La gráfica está contenida en una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas y se ubica en el primer cuadrante.
- Si A es directamente proporcional a B, entonces B es directamente proporcional a A.

Ejemplo ilustrativo1:

En una librería se desea comprar cuadernos del mismo tipo a S/.5 cada uno. Analizar como varía el valor del costo total cuando el número de cuadernos varíe.

**RESOLUCION:**

		$\times 6$	$\div 3$	$\times 5$	$\div 2$	$\times 3$
COSTO TOTAL	5	30	10	50	25	75
N° CUADERNOS	1	6	2	10	5	15
		$\times 6$	$\div 3$	$\times 5$	$\div 2$	$\times 3$

(COSTO TOTAL) DP (N° de CUADERNOS)

Se observa:

$$\frac{5}{1} = \frac{30}{6} = \frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{25}{5} = \frac{75}{15} = 3 \text{ Constante de proporcionalidad}$$

$$\Rightarrow \frac{(\text{Costo total})}{(\text{N° de cuadernos})} = \text{cte.}$$

OBSERVACION: observamos que si uno de ellos “aumenta” el otro también lo hace; y en caso de “disminuir” uno de ellos también lo hará el otro.

1.2 MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (I.P.)

Dos magnitudes M y N serán inversamente proporcionales cuando al **aumentar** o **disminuir** los valores de una de ellas los valores de la otra **disminuyen** o **aumentan**, respectivamente en la misma proporción.

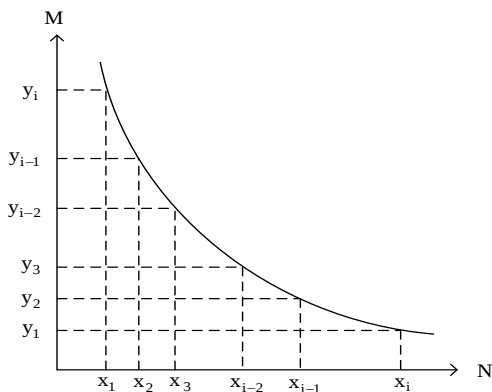
Por lo tanto el **producto** de los valores correspondientes siempre a una misma constante denominada **constante de proporcionalidad inversa**.

En general tenemos:

$$M \text{ es I.P. a } N \Leftrightarrow M \times N = k$$



Graficamente se observa:



$$y_1 \cdot x_i = y_2 \cdot x_{i-1} = y_3 \cdot x_{i-2} = \dots = y_i \cdot x_1 = k$$

Ejemplo ilustrativo 2:

Juan una obra puede hacerla en 24 horas. Para ello puede utilizar 3 días, trabajando 8 horas por día; o en 6 días trabajando 4 horas por día; etc. Es decir las magnitudes D (días) y H (horas) son magnitudes inversamente proporcionales.

RESOLUCION:

Magnitud	Valores Correspondientes			
Días	$D_1=8$	$D_2=6$	$D_3=4$	$D_4=3 \dots$
Horas	$H_1=3$	$H_2=4$	$H_3=6$	$H_4=8 \dots$

Luego:

$$8 \times 3 = 6 \times 4 = 4 \times 6 = 3 \times 8 = \dots = k = 24$$

Es decir tanto las horas diarias trabajadas como los días laborados varían inversamente proporcionales con una constante de proporción 24.

1.2 PROPORCIONALIDAD COMPUESTA



Relación que se establece entre más de dos magnitudes, y que recoge mucha de las leyes científicas, pues presentan situaciones que necesariamente requieren combinación de los tipos de magnitudes (directa o inversa).

Por **ejemplo**: Se tienen magnitudes A, B y C tales que $\sqrt[3]{A^4}$ es D.P a C^3 e I.P a $\sqrt{B}$.

Entonces resumiríamos así:

$$\frac{\sqrt[3]{A^4} \cdot \sqrt{B}}{C^3} = K$$

NOTA

Una de las consecuencias de la proporcionalidad entre magnitudes resulta cuando al relacionarlas tenemos que calcular uno de los dos valores de la magnitud incógnita, previamente conocidos los valores de las magnitudes (puede ser una o más magnitudes). Este proceso se reduce a una “forma práctica” que denominaremos REGLA DE TRES. Esta a su vez puede ser SIMPLE o COMPUESTA.

2.- REPARTO PROPORCIONAL:

El reparto proporcional es una regla que tiene por objeto repartir una cantidad en partes, directa o inversamente proporcional a dos o más números dados.

2.1.- REPARTO SIMPLE

2.2.1 REPARTO SIMPLE DIRECTO.- Las partes deben ser proporcionales a los números dados, es decir, los cocientes respectivos deben permanecer constantes.

Ejemplo ilustrativo 3:

Repartir 600 en 3 partes que sean proporcionales a 4, 7 y 9

RESOLUCION:

Sean las partes A , B y C



Se tiene $A + B + C = 600$

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{7} = \frac{C}{9} = k$$

Además:

Despejando cada una de las variables:

$$A = 4k$$

$$B = 7k$$

$$C = 9k$$

$$\text{Luego: } 4k + 7k + 9k = 600 \Rightarrow k = 30$$

Entonces las tres partes son:

$$A = 4(30) = 120$$

$$B = 7(30) = 210$$

$$C = 9(30) = 270$$

NOTA:

- Quando los números son proporcionales a fracciones, es conveniente transformarlos a números enteros, para ello multiplicamos por el MCM de los denominadores.
- Si A es D. P. a B y también es D.P. a C entonces A es D. P. a (B.C)

2.2.2.- REPARTO SIMPLE INVERSO.- Consiste en repartir directamente proporcional a las inversa de los números dados.

Ejemplo ilustrativo 4:

Repartir 780 en tres partes que sean inversamente

Proporcionales a los números: 6, 9 y 12

RESOLUCION:

		x(MCM)		
		I.P	D.P	D.P.
780	A	6	1/6	(1/6) (36k) = 6k
	B	9	1/9	(1/9) (36k) = 4k
	C	12	1/12	(1/12)(36k) = 3k

$$\text{Luego: } 6k + 4k + 3k = 780 \Rightarrow k = 60$$

Las partes son:

$$A = 6(60) = 360;$$

$$B = 4(60) = 240$$

$$C = 3(60) = 180$$

Nota:

En reparto inverso, es aquel que tiene el número proporcional menor le toca la parte mayor y viceversa.

**2.2.- REPARTO COMPUESTO**

Cuando las magnitudes en referencias son magnitudes directa e inversamente proporcionales.

Nota:

Si A es DP con B y es IP con C
entonces
A es DP con $B \times \left(\frac{1}{C}\right)$ o A es DP con $\frac{B}{C}$

Ejemplo ilustrativo 3:

Repartir 2225 en tres partes que sean D.P a los números 3 , 5 y 8 e inversamente proporcionales a los números 4 , 6 y 9.

RESOLUCION:

		D.P		I.P		D.P		D.P	
		Partes	D.P		I.P	D.P		D.P	
2225	A	3		4		$1/4$		$3(1/4) \times [36k]$	
	B	5		6		$1/6$		$5(1/6) \times [36k]$	
	C	8		9		$1/9$		$8(1/9) \times [36k]$	

$$A = (3/4).(36) = 27k$$

$$B = (5/6).(36) = 30k$$

$$C = (8/9).(36) = 32k$$

$$27k + 30k + 32k = 2225 \Rightarrow k = 25$$

$$A = 27(25) = 675 ; B = 30(25) = 750 ; C = 32(25) = 800$$

3. REGLA DE TRES SIMPLE

Es la operación que se realiza para calcular uno de los términos de una proporción geométrica, siendo conocidos los otros tres términos. En este caso intervienen solamente dos magnitudes.

**3.1.- REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA**

Es aquella en la cual intervienen dos magnitudes que son directamente proporcionales, cumpliéndose por lo tanto que el cociente de sus cantidades correspondientes es constante.

DISTRIBUCIÓN DE DATOS E INCOGNITAS

MAGNITUD “A” MAGNITUD “B”

SUPUESTO a_1 b_1
PREGUNTA a_2 x

SE CUMPLE : $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x}$

De donde : $x = \frac{b_1 \times a_2}{a_1}$

¡ SE OPERA EN ASPA !

3.2.- REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Es aquella en la cual intervienen dos magnitudes que son inversamente proporcionales, cumpliéndose por lo tanto que el producto de sus cantidades correspondientes es constante.

Mag. A Mag. B
SUPUESTO a_1 b_1
PREGUNTA a_2 x
SE CUMPLE : $a_1 \times b_1 = a_2 \times (x)$

De donde : $x = \frac{b_1 \times a_1}{a_2}$

¡ SE OPERA EN PARALELO !

**MÉTODO DE RESOLUCIÓN(De las rayas)**

Clasificamos las magnitudes en tres tipos:

☞ CAUSA:

Son los que hacen la obra y todo lo que ayuda en su realización

Ejemplo : obreros , máquinas, animales, habilidad, esfuerzo, rendimiento o eficiencia, etc.

☞ CIRCUNSTANCIA:

Son las condiciones dadas en el tiempo para acabar la obra.

Ejemplo : Días, horas diarias, raciones diarias, etc.

☞ EFECTO:

Son los que hacen la obra y todo lo que ayuda en su realización

Ejemplo : Dificultades, dimensiones de la obra, resistencia del medio, etc.

Esquemáticamente tenemos :

CAUSA	CIRCUNSTANCIA		EFECTO
Peones	días	h/d	área
8	24	8	40^2
5	x	6	50^2

Igualamos el producto de los valores que se encuentran en la misma línea siguiendo la dirección de la flecha.

$$(5)(x)(6)(40^2) = (8)(24)(8)(50^2)$$

Ejemplo ilustrativo 5:

Si un grifo dando por minutos 100 litros de agua, llena en 8 horas un pozo; cinco grifos, dando cada uno 40 litros por minutos. Las horas en que llenará un pozo 6 veces al anterior?

A) 28

B) 36

C) 45

D) 24

E) 32

**RESOLUCION**

Causa		Circunstancia		Efecto
1 grifo	→	100 l/min	→	8 h/d
5 grifos	→	40 l/min	→	x h/d
				1 pozo
				6 pozos

Donde:

$$x = \frac{1 \cdot 100 \cdot 8 \cdot 6}{5 \cdot 40 \cdot 1} = 24$$

CLAVE "D"

Observaciones:

$$\frac{\text{Causa} \times \text{Circunstancia}}{\text{Efecto}} = k$$

$$\Rightarrow \text{Causa} \times \text{Circunstancia} = \text{Efecto}$$

Podemos concluir que:

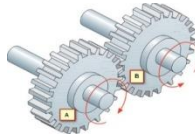
- Las CAUSAS son I. P. a las CIRCUNSTANCIAS
- Las CAUSAS son D. P. a los EFECTOS
- Las CIRCUNSTANCIAS son D. P. a los EFECTOS

A continuación de manera práctica presentamos algunos casos de magnitudes directa e inversamente proporcionales:

Magnitud 1	Magnitud 2	Relación
# de obreros	obra	DP
obra	tiempo	DP
eficiencia	# de obreros	IP
obra	dificultad	IP
# de obreros	dificultad	DP
obra	eficiencia	DP

**4. APLICACIÓN EN LOS SISTEMAS DE ENGRANAJES****a) Caso I**

Cuando están en contacto (engranan).



$$(\# d_A) \times (\# V_A) = (\# d_B) \times (\# V_B)$$

Donde:

$\# d_A$: Número de dientes de A.

$\# V_A$: Número de vueltas de A.

b) Caso II

Cuando están unidos por un eje común.



$$\# V_A = \# V_B$$

Ejercicios Resueltos

1. A varía directamente proporcional a B y C; C varía directamente proporcional a F^3 cuando A es 160, B es 5, F es 2, si B es 8 y F es 5. El valor de A es:
- A) 300 B) 200 C) 600
D) 400 E) 500

RESOLUCIÓN:



$$A = k_1 \times B \times C \dots\dots(1)$$

$$C = k_2 \times F^3$$

$$A=160 \quad ; A=?$$

$$B=5 \quad ; B=8$$

$$F=2 \quad ; F=5$$

$$\text{En (1):} \quad A = k_1 \times B \times k_2 \times F^3$$

$$A = k \times B \times F^3$$

$$k = \frac{A}{B \times F^3}$$

$$\frac{160}{5 \times 2^3} = \frac{A_2}{8 \times 5^2} \Rightarrow A_2 = \boxed{400}$$

CLAVE “D”

2. Sean a, b y c enteros positivos, donde las medias geométricas de: ab, ac y bc son D.P. a los números 3, 4 y 5 respectivamente; encontrar el valor de la constante de proporcionalidad que hace que los números a, b y c sean los menores posibles.

A) 30

B) 50

C) 70

D) 40

E) 60

RESOLUCIÓN:

$$\frac{\sqrt{ab}}{3} = \frac{\sqrt{ac}}{4} = \frac{\sqrt{bc}}{5} = k$$

$$\text{Donde: } \frac{ab}{9} = \frac{ac}{16} = \frac{bc}{25} = k^2$$

$$\text{M.C.M}(9, 16, 25) = 3^2 \times 2^4 \times 5^2$$

Además las constantes están elevadas al cuadrado.

$$\sqrt{3^2 \times 2^4 \times 5^2} = 3 \times 4 \times 5 = \boxed{60}$$

CLAVE “E”

- 3 El precio de impresión de un libro es directamente proporcional al número de páginas e inversamente proporcional al número de ejemplares que se imprimen, se editaran 2000 ejemplares de un libro de 400 páginas y cuesta s/6,00 el ejemplar . Lo que costará editar un ejemplar si se mandaron a imprimir 1800 libros de 360 páginas es:

A) 5

B) 8

C) 4

D) 7

E) 6

**RESOLUCIÓN:**

Sean: P = Precio de impresión

N = # de páginas

E = # de ejemplares

P D.P N

P I.P E

Entonces: $\frac{P \times E}{N} = \text{cte} \dots \dots \dots (1)$

De los datos:

P	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{x}$
N	400	360
E	2000	1800

Reemplazando en (1)

$$\frac{6 \times 2000}{400} = \frac{(x)1800}{360}$$

Resolviendo: $x = \boxed{\frac{5}{.6}}$ **CLAVE “E”**

- 4 Un obrero tarda en realizar un cubo compacto de concreto de 30cm de arista en 50 minutos. El tiempo tardaría en hacer 9 cubos cada uno de 60cm de arista es:

A) 20h

B) 15h

C) 60h

D) 30h

E) N.A.

RESOLUCIÓN:

Volumen (D.P) tiempo

$$\frac{\text{Volumen}}{\text{Tiempo}} = k$$

Para un cubo



$$\frac{30^3}{50} = \frac{60^3}{x} \Rightarrow x = 400$$

Para nueve cubos:

Tiempo: $9(400) = 3\,600$ min.

$$T = \boxed{60h}$$

CLAVE "C"

- 5 Los precios de las casas varían directamente proporcional al área construida e inversamente proporcional con la distancia que las separa de Lima. Si por una casa que se encuentra a "D" kilómetros de Lima, se paga 3500 soles . Lo que se pagara por otra que se ha construido con el mismo material que la anterior y que su área es $\frac{1}{7}$ de la anterior y que su distancia a Lima es el doble de la anterior es:

- A) 5000
B) 2000
C) 3000
D) 1000
E) 2500

RESOLUCIÓN:

Precio "P "

área "S "

Dísta ncia "d "

$$P \propto S \left\{ \begin{array}{l} P_1 d_1 = \frac{P_2 d_2}{S_1} = \frac{P_2 d_2}{S_2} \\ P \frac{1}{\alpha} d \end{array} \right.$$

$$P_1 = 35000 \quad P_2 = x$$

$$d_1 = d \quad d_2 = 2d$$

$$S_1 = 7S \quad S_2 = S$$

$$\frac{35000d}{7S} = \frac{x(2d)}{S}$$

Resolviendo:

$$x = \boxed{2500}$$

CLAVE "E"



- 6 Se reparte una herencia D.P a las edades de 4 personas cada uno de ellos recibe s/.400, s/.300, s/.200 y s/.100 respectivamente. Si el reparto se hiciera I.P a las edades lo que recibe el menor es:

A) 280

B) 320

C) 360

D) 400

E) 480

RESOLUCIÓN:

Total de herencia.

$$400 + 300 + 200 + 100 = 1000$$

Las edades son proporcionales a

4; 3; 2; 1

Luego:

Total a repartir 1000

$$A \quad \frac{\text{I.P.}}{\text{D.P.}} \quad 4 \quad \frac{1}{4} \times 12 = 3K$$

$$B \quad \frac{\text{I.P.}}{\text{D.P.}} \quad 3 \quad \frac{1}{3} \times 12 = 4K$$

$$C \quad \frac{\text{I.P.}}{\text{D.P.}} \quad 2 \quad \frac{1}{2} \times 12 = 6K$$

$$D \quad \frac{\text{I.P.}}{\text{D.P.}} \quad 1 \quad \frac{1}{1} \times 12 = 12K$$
$$25K$$

$$25K = 1000 \rightarrow K = 40$$

El menor recibe: s/.480

CLAVE “E”

- 7 El peso “W” de un cilindro varia proporcionalmente a su altura “n” y al cuadrado del diámetro “d” de su base . La suma de los números con que se llenara los espacios en blanco de la siguiente tabla es:

W	25		7,2
h	2,5	4	2
d	2	0,6	



A) 4,80

B) 7,20

C) 5,04

D) 7,44

E) 6,80

RESOLUCIÓN:

W	n	d
25	2,5	2
a	4	0,6
7,2	2	b

Por dato: $\left. \begin{array}{l} W \propto n \\ W \propto d^2 \end{array} \right\} \Rightarrow W \propto n \times d^2$

$$\text{Luego: } \frac{25}{(2,5)(2^2)} = \frac{a}{(4)(0,6)^2} = \frac{72}{2(b^2)}$$

De donde:

$$a = 3,60$$

$$b = 1,20$$

$$a + b = 4,80 \quad \text{Rpta.}$$

CLAVE "A"**Ejercicios Propuestos**

1. Sea $f(x)$ una función de proporcionalidad directa y $g(x)$ una función de proporcionalidad inversa. Si $g(2) = 3$. El valor de

$$E = \frac{f(8) \cdot f(5) - [f(g(1))]^2}{f(8) \cdot f(0,5)} \text{ es:}$$

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

2. El precio de una casa varía DP a su área e IP a la distancia hasta Trujillo. Si una casa ubicada 75 Km al norte de Trujillo cuesta 45000 dólares. Lo que costará una casa del mismo material, de doble área que la anterior y ubicada a 200km al sur de la primera casa es:

A) \$50000

B) \$52500



- C) \$51000
D) \$53400
E) \$54000

3. En el bar “ los negros” se promociona la venta de una gaseosa. Si en los primeros días se nota ciertas irregularidad, pero a partir del quinto día en que se vendió 24 botellas, el número de gaseosas fue IP a los días transcurridos hasta ciertos día; de allí en adelante el número de gaseosas vendidos fue DP a los días transcurridos hasta el día 54 en que se vendieron 45 gaseosas; entonces el día en que se vendió la menor cantidad de gaseosas fue:

- A) 10
B) 12
C) 16
D) 18
E) 27

4. Si “m” obreros pueden hacer un trabajo en “m” días, entonces los días menos que se podrá hacer dicho trabajo, si el número de obreros se incrementa en un 20% es:

- A) $\frac{m}{3}$
B) $\frac{2m}{9}$
C) $\frac{5m}{6}$
D) $\frac{m}{9}$
E) $\frac{m}{6}$

5. Se desea comprar 42 camisas con S/. 3200; pero esta suma no cubre el costo, por lo que se devuelve 4 camisas y el vendedor devolvió tanto como faltaba para cubrir el valor de las 42 camisas el precio de cada camisa es:

- A) 80
B) 82
C) 85
D) 90
E) 92

6. Se prevee que $2\sqrt{M}$ chompas pueden ser tejidas por $\frac{M}{2}$ tejedoras en $\frac{M}{3}$ días, pero si al iniciar el trabajo se retiran el 25% de las tejedoras, entonces las restantes pueden hacer la mitad del trabajo previsto en :

- A) $\frac{M}{9}$ días
B) $\frac{5M}{12}$ días
C) $\frac{M}{5}$ días



D) $\frac{3M}{8}$ días

E) $\frac{2M}{9}$ días

7. Una compañía posee 3 máquinas de 84% de rendimiento para producir 1600 envases cada 6 horas diarias de trabajo, si se desea producir 3000 envases en 4 días trabajando 7 horas diarias. Las máquinas de 90% de rendimiento que se requiere son:

- A) 3 B) 6 C) 8 D) 10 E) 9

8. Si: $\frac{A}{4} = \frac{B}{7} = \frac{C}{12} = \frac{D}{6}$ y $A.B + C.D = 2500$. El valor de $\frac{B}{7}$, es:
A) 12 B) 9 C) 5 D) 3 E) 18

9. Se reparte 5200 soles entre 3 personas, en forma directamente proporcional a los números: m , m^2 y m^3 ("m" es un número natural). Si el menor recibe 400 soles la cantidad que recibe el mayor, es: (en soles)

- A) 1200 B) 1900 C) 2400 D) 3600 E) 1250

10. Se sabe que: "M" es D.P. con N^5 y C e I. P. Con B y $\sqrt{E}$. Si el doble de "C" se cuadruplica y "B" se duplica. Lo que pasa con "M" es:

- A. Se reduce a su tercera parte
B. Se reduce a su mitad
C. Permanece constante
D. Se triplica
E. Se cuadruplica

11. Carlos es el triple de rápido que José y José es el doble de rápido que Tito. Si juntos hacen una obra en 18 días, el tiempo que le tomaría a Carlos realizar el trabajo sólo es:

- A) 12 B) 14 C) 16 D) 22 E) 27

12. Suponiendo que el precio de los terrenos varía D.P. a su área e I.P. a la distancia que lo separa de una ciudad A. En estas condiciones un terreno de forma cuadrada que se encuentra a 180 km al sur de esta ciudad esta valorizado en s/. 5 000. El precio que tendría un terreno de forma cuadrada cuyo lado sea la tercera parte del anterior y se encuentra a 100 km de esta ciudad es:



- A) 1000
B) 1200
C) 1300
D) 1900
E) 1350
13. Si un grupo de 45 pintores pueden pintar un muro de 270 m^2 en 8 días trabajando 6 horas diarias. Entonces el número de días que necesitan otro grupo de 40 pintores doblemente eficientes que los anteriores para pintar un muro de triple dificultad de 200 m^2 , trabajando una hora menos por día, es:
- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13
14. Si 8 agricultores trabajando 10 horas diarias durante 5 días pueden arar un terreno cuadrado de 40m de lado. Entonces el número de agricultores de doble rendimiento serán necesarios para que en 6 días, trabajando 8 horas diarias puedan arar otro terreno también cuadrado de 48 m de lado, es:
- A) 6 B) 7 C) 9 D) 11 E) 8
15. Si a cada término de la razón $\frac{2}{7}$, se le disminuye $\frac{7}{5}$ de la razón, se obtiene la razón $\frac{x}{66}$. El valor de "X", es:
- A) 8 B) 16 C) 48 D) 88 E) 24
16. Un grupo de 30 obreros se comprometen a hacer una obra en 58 días trabajando 10 horas diarias, diez días después de iniciado la obra se pidió que la obra quedara terminada "x" días antes del plazo estipulado para lo cual se aumentaron diez obreros más y todos trabajaron 12 horas diarias. Si terminaron la obra en el nuevo plazo estipulado, entonces el valor de "x", es:
- A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 45



17. Una cuadrilla de 15 obreros con un rendimiento del 80% cada uno, trabajando 11 días a razón de 8 horas diarias han hecho $\frac{2}{5}$ de una obra; luego se retiran 5 obreros y son reemplazados por 3 obreros de un rendimiento del 100%. Si trabajan todos a razón de 9 horas diarias, entonces el número de días que utilizaron para hacer lo que faltaba de la obra, es:
- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 17
18. Se sabe que el tiempo de duración de un artefacto es D.P. con el cuadrado de la energía que consume. Cuando un artefacto consume 2 unidades de energía, su tiempo de duración es 12 meses; por lo tanto cuando dura 48 meses, la cantidad de energía que consume, es:
- A) 1
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6
19. Un canguro persigue a un conejo que le lleva 90 saltos de ventaja. Sabiendo que el canguro da 7 saltos mientras que el conejo da 6 saltos y que 4 del conejo equivale a 3 del canguro. Entonces, el número de saltos que el canguro tendrá que hacer para alcanzar al conejo es:
- A) 198 B) 189 C) 172 D) 180 E) N.A.
20. Si tres hombres trabajando 8 horas diarias han hecho 80 metros de una obra en 10 días, el número de días que necesitarán 5 hombres trabajando 6 horas diarias para hacer 60 metros de la misma obra, es:
- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

**CLAVES**

1. B	2. E	3. B	4. B	5. A
6. E	7. E	8. C	9. D	10. E
11.E	12. A	13.D	14.A	15. B
16. B	17. D	18.C	19.B	20. C

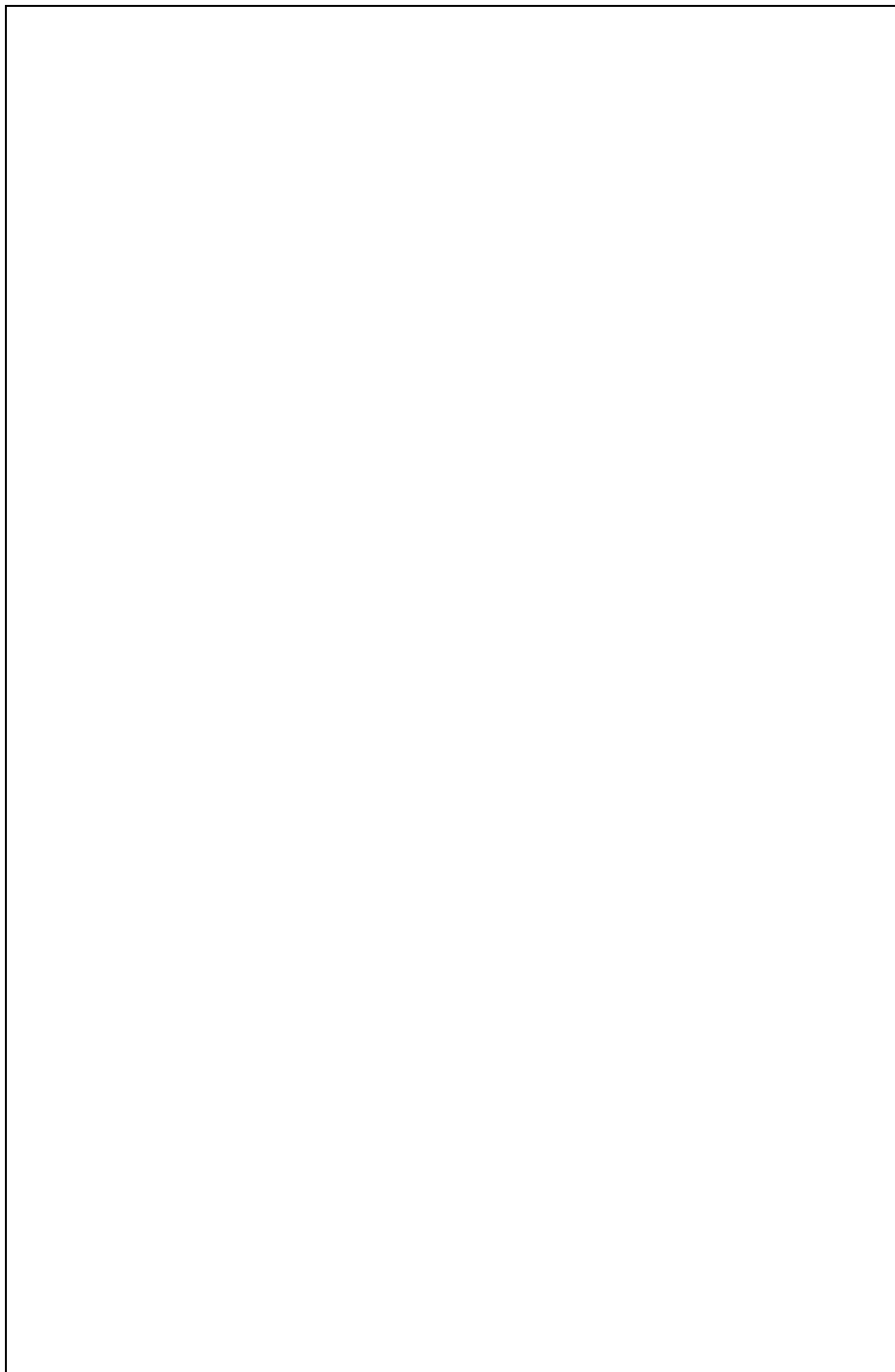
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asociacion Fondo de Investigadores y Editores (2015) Aritmetica, análisis del número y sus aplicaciones (2ª edición) Perú: Lumbreras.

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Gaita Iparraguirre, C. y otros (2014) Matemáticas para no Matemáticos (2ª edición). Perú: Estudios Generales PUCP.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3ª edición). Perú: Moshera.



**SEMANA 10****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Resolver situaciones problemáticas sobre tanto por cuanto y tanto por ciento usando definiciones y técnicas operativas apropiadas.
2. Resolver situaciones problemáticas comerciales referidas al aumento o el descuento sucesivo o relación de dos o mas magnitudes.
3. Calcular el aumento o disminución porcentual que sufren las figuras geométricas según la variación de las medidas de sus elementos.



MATEMÁTICA COMERCIAL

En nuestra vida cotidiana muy a menudo escuchamos o realizamos operaciones sobre tanto por cuanto en diversas formas. Las actividades comerciales, la fijación de precios, las ofertas, los descuentos, etc.

Hoy en día nos brindan los centros comerciales, para atraer más clientes y consumidores así por ejemplo por cada 50 naranjas nos dan 8 de ellas o porcada 100 naranjas dan 16 de ellas.



Por otro lado cada día escuchamos los reportes de las encuestadoras que la aprobación del presidente Kuczynski ha bajado 6% con respecto al mes anterior, o en la ciudad de Trujillo la delincuencia se ha incrementado en un 8% con respecto al año anterior, etc.



El tanto por cuanto que es una variación del tanto por cuanto tiene diversas aplicaciones. En nuestro medio, es una herramienta indispensable para las ciencias, la cual nos ayuda a solucionar

problemas y predecir sucesos.

Se puede mencionar a la matemática financiera, estadística, administración entre otros.

Tal es así que en este capitulo, se dará mayor énfasis a problemas con aplicaciones comerciales, precios fijos, descuentos sucesivos, ganancias, pérdidas etc.

**1.- TANTO POR CUANTO**

Si una cantidad se divide en “b” partes iguales y se toman “a” partes se dice que estamos tomando el “a” por “b” de dicha cantidad, es decir:

$$\text{“a” por “b” de } N = \frac{a}{b}(N)$$

Ejemplo ilustrativo 1

El 8 por 15 de 135 es:

A) 28

B) 36

C) 45

D) 64

E) 72

RESOLUCION

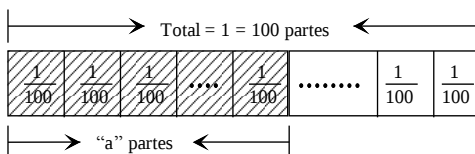
$$\frac{8}{15}(135) = 72$$

CLAVE “E”

2.- TANTO POR CIENTO

Es el número de partes que se toma de cada 100.

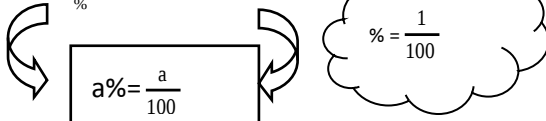
Gráficamente:



$$\text{“a” partes por cada 100 partes} = \frac{a}{100}$$

$$\text{“a” partes cada ciento de partes} = \frac{a}{100}$$

$$\text{“a” por ciento} = \frac{a}{100}$$



Ejemplos:

$$* 20 \% = \frac{20}{100}$$

$$* 35 \% = \frac{35}{100}$$

$$* 73 \% = \frac{72}{100}$$

$$* \frac{48}{100} = 48 \%$$

**RECUERDA**

$$\text{El } a \% \text{ de } N = \frac{a}{100}(N)$$

Ejemplo ilustrativo 2:

El 28% de 500 es:

A) 128

B) 140

C) 104

D) 164

E) 146

RESOLUCION

$$\frac{28}{100}(500) = 140$$

CLAVE “B”**Ejemplo ilustrativo 3:**

Si el 8% de cierta cantidad es 4000, entonces dicha cantidad es:

A) 80000

B) 40000

C) 70000

D) 50000

E) 60000

RESOLUCION

$$x = \frac{100}{8}(4000) = 50000$$

CLAVE “D”**Ejemplo ilustrativo 4:**

Si 140 es un porcentaje de 500, entonces dicho porcentaje es:

A) 28%

B) 40%

C) 38%

D) 52%

E) 16%

RESOLUCION

$$x = \frac{140}{500}(100) = 28\%$$

CLAVE “A”

**3.- DESCUENTOS SUCESIVOS**

Cuando tengamos que hacer descuentos sucesivos, recordemos que el primer descuento se aplica a la cantidad inicial, y a partir del segundo descuento, éstos se aplican a la cantidad que ha quedado del descuento anterior.

Ejemplo ilustrativo 5:

El descuento único al que equivalente dos descuentos sucesivos del 10 % y 20 % es:

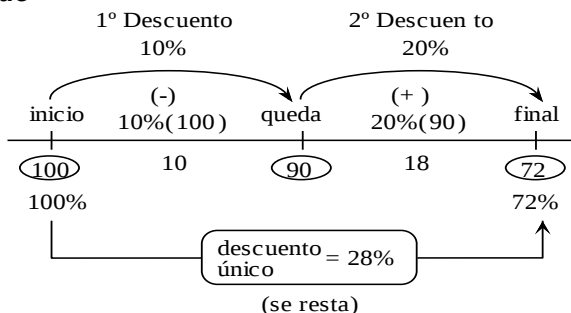
A) 28%

B) 40%

C) 38%

D) 52%

E) 16%

RESOLUCION**1er Método****2do. Método**

Cantidad Inicial = 100 %

	Descuento	Queda
1er.	10 %	90 %
2do.	20 %	80 %

Cantidad final = 80 % (90 %)

$$\text{Cantidad final} = \frac{80}{100} (90 \%) = \frac{72 \%}{\text{pagué}}$$

$$= 100 \% - 72 \% = \mathbf{28 \%}$$

**3er Método (por fórmula)**

$$Du = \left[(D_1 + D_2) - \frac{D_1 - D_2}{100} \right] \%$$

Du : Descuento único

D₁ : Descuentos sucesivos

$$\therefore Du = \left[(10 + 20) - \frac{10(20)}{100} \right] \% = 28 \%$$

CLAVE "A"**4.- AUMENTOS SUCESIVOS**

De manera análoga también se hace cuando se trata de aumentos sucesivos. El primer tanto por ciento de aumento se aplica a la cantidad inicial; el segundo aumento se aplica a lo que ha resultado luego del primer aumento, el tercer aumento se aplica a lo que ha resultado del segundo aumento y así sucesivamente.

Ejemplo ilustrativo 6:

Se proponen dos aumentos sucesivos de 10% y 30%. El aumento único equivale a:

A) 84%

B) 43%

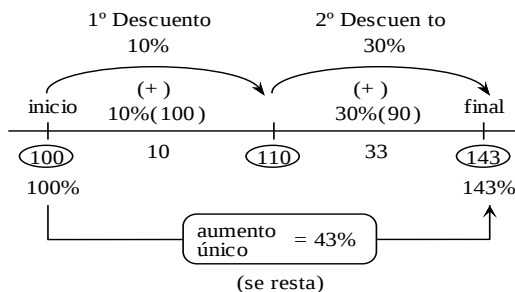
C) 56%

D) 28%

E) 64%

RESOLUCION

El 2º aumento se aplica sobre lo que quedó al hacer el 1er aumento

1er Método (Suposición adecuada)**2 do Método**

Cantidad Inicial = 100 %



	Aumento	Queda
1er.	10 %	110 %
2do.	30 %	130 %

Cantidad final = 110 % (130 %)

$$\text{Cantidad final} = \frac{110}{100} (130 \%) = \underbrace{143 \%}_{\text{pagué}}$$

$$\therefore A_{\text{único}} = 143 \% - 100 \% = 43 \%$$

3er Método (por fórmula)

$$A_u = \left[(A_1 + A_2) + \frac{A_1 + A_2}{100} \right] \%$$

A_u = Aumento único

A_1 ; A_2 : Aumentos sucesivos

$$\therefore A_u = \left[(10 + 30) + \frac{10(30)}{100} \right] \% = 43 \%$$

Si son más de 2 descuentos se aplica la fórmula de 2 en 2

CLAVE “B”

5.-VARIACIONES PORCENTUALES

En las variaciones porcentuales sólo se analiza las cantidades que varían; más no a las cantidades fijas.

Ejemplo ilustrativo 7:

Si el lado de un cuadrado aumenta en 30 %. El porcentaje que aumenta su área es:

- A) 69%
D) 48%

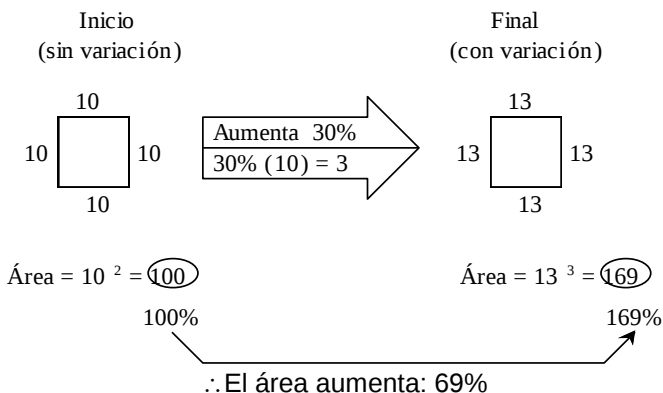
- B) 56%
E) 34%

- C) 26%

**RESOLUCION****1er Método (suposición adecuada)**

Consiste en dar valores adecuados de tal manera que la magnitud cuya variación se quiere analizar sea 100 así:

Asumamos que el lado cuadrado sea 10 (este valor tiene 30 % y además hace que el área sea como 100)

**2do Método**

INICIO	FINAL
Lado = L Área = L^2	Lado = 130 % L Área = $(130 \% L)^2$ $= \frac{130}{100} (130 \% L^2) = 169 \% L^2$

$\therefore$ Aumentó en 69 %

CLAVE "A"

**Ejemplo ilustrativo 8:**

Si se aumenta el largo de un triángulo en 25 %. El porcentaje que debe disminuir el ancho para que el área no varíe es:

A) 10%

B) 30%

C) 60%

D) 40%

E) 20%

RESOLUCION

INICIO	FINAL
$b = 20$	$b = 125 \% (20) = 25$
$h = 100$	$h = 80$
$A = 2000$	$A = 2000$ (no varía)

De donde:

$$25 h = 2000 \Rightarrow h = 80$$

$\therefore$ El ancho disminuye: $100 - 80 = 20\%$

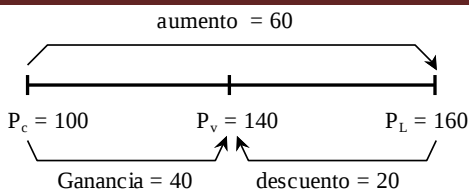
CLAVE “E”

6.- APLICACIONES COMERCIALES

Supóngase que un comerciante compra un artículo en 100 soles; estos 100 soles es el llamado precio de compra o precio de costo (P_c); para venderlo aumenta dicho precio en 60 soles, fijando así el precio inicial de venta en 160 soles, llamado también precio fijado o precio de lista (P_L)

Al momento de vender (como siempre sucede) hace un descuento de 20 soles al precio de lista; vendiendo de esta manera en 140 soles que constituye recién el precio de venta del artículo (P_v) y así el comerciante obtiene una ganancia (G) de 40 soles respecto a su inversión: (P_c)

Esquemmatizando:

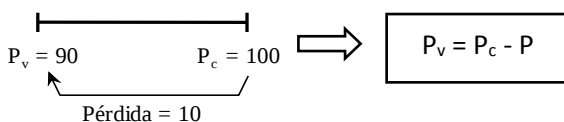


De donde:

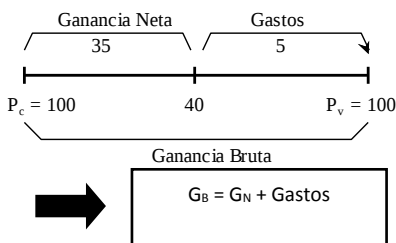
$$P_v = P_c + G$$

$$P_L = P_v + \text{Descuento}$$

Si el comerciante por alguna razón vende el producto a 90 soles, entonces tendría una pérdida (P) de 10 soles.



Además al adquirir el producto el ocasiona un gasto de 5 soles, entonces la ganancia neta (G_N) sería 35 soles y los 40 soles iniciales constituiría la ganancia bruta (G_B).



Nota:

- La ganancia o pérdida se expresa como un porcentaje del precio de costo, salvo que se diga otra cosa
- La rebaja o descuento se expresa como un porcentaje del precio de lista

**Ejemplo ilustrativo 9:**

Se vende una camisa en s/. 80 ganando el 25 % del costo. Su costo fue:

A) 100

B) 70

C) 60

D) 55

E) 64

RESOLUCION

Datos: $P_v = P_c + G$

$P_v = 80$ $80 = P_c + 25 \% P_c$

$G = 25 \% P_c$ $80 = P_c$

$$\therefore P_c = 64$$

CLAVE “E”**Ejemplo ilustrativo 10:**

Al vender un objeto se ganó el 25 % del precio de costo. El porcentaje del precio de venta que se ganó es:

A) 10%

B) 30%

C) 60%

D) 40%

E) 20%

RESOLUCION

Sea: $P_c = 100$, entonces:

$$G = 25 \% (100) = 25$$

Pero:

$$P_v + P_c + G \Rightarrow P_v = 100 + 25 = 125$$

Ahora ¿qué porcentaje de $P_v = 125$ es $G = 25$?

$$\therefore x \% (125) = 25 \Rightarrow x = 20 \%$$

Por fórmula:

v : % de ganancia del P_v

c : % de ganancia del P_c

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{c} = \frac{1}{100}$$



Aquí: $c = 25\%$; $v = ?$; Luego:

$$\frac{1}{v} - \frac{1}{25} = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{v} = \frac{1}{100} + \frac{1}{25}$$

$\therefore v = 20\%$

CLAVE “E”

7.- MEZCLAS PORCENTUALES

Comúnmente se realizan mezclas que contiene alcohol y agua, sin embargo se puede utilizar esta regla para otros componentes o sustancias, teniendo en cuenta lo siguiente: A la **concentración**, también se le identifica como **pureza**, que puede ser expresada en grados ($x^\circ \Leftrightarrow x\%$) . Por tanto la pureza de la mezcla nos indica qué tanto por ciento representa el volumen de la sustancia pura respecto al volumen total.

Ejemplo ilustrativo 11:

Una mezcla de alcohol contiene 48 litros de alcohol y 32 litros de agua. La concentración de la mezcla es:

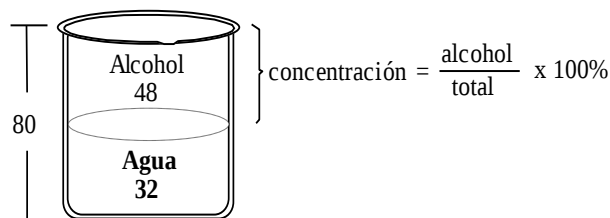
- A) 10%
D) 40%

- B) 30%
E) 20%

- C) 60%

RESOLUCION

Concentración es el porcentaje de alcohol que hay en la mezcla.



$$\therefore \text{Concentración} = \frac{48}{80} \times 100\% = 60\%$$

CLAVE “C”

**Ejemplo ilustrativo 12:**

Una mezcla de alcohol contiene 48 litros de alcohol y 32 litros de agua.
La concentración de la mezcla es:

A) 24

B) 30

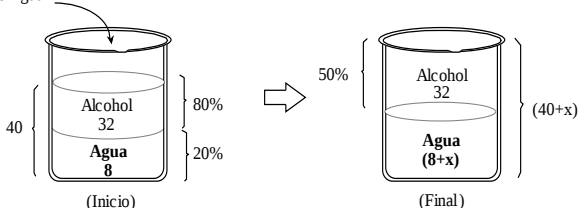
C) 56

D) 45

E) 28

RESOLUCION

"x" litros de Agua



Del último gráfico:

50 % (mezcla final) = alcohol puro

50 % $(40+x) = 32$

De donde:

$$x = 24 \text{ litros}$$

CLAVE "A"**Ejemplo ilustrativo 13:**

Se mezcla 40 litros de alcohol al 60 % con 80 litros de alcohol al 30 %.

La concentración final de la mezcla es:

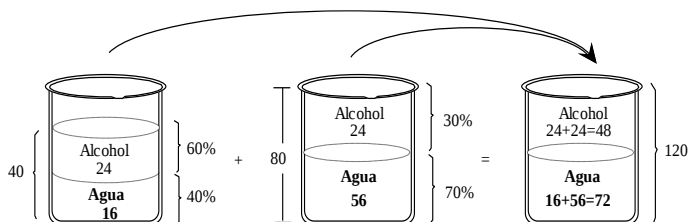
A) 10%

B) 30%

C) 60%

D) 40%

E) 20%

RESOLUCION



LOS MINISTROS RECORRIENDO EL LABORATORIO DE BIOFARMACIA.

Ejercicios Resueltos

1. Un artículo se vendió en 120 soles. Se ganó el 20 % del costo, más el 15 % de venta. Lo que costó producir dicho artículo es:

A) 80 B) 75 C) 90
D) 100 E) 85

RESOLUCIÓN

$$P_v = P_c + \text{Ganancia}$$

$$120 = P_c + 20 \% P_c + 15 \% (120)$$

$$120 = 120 \% P_c + 18$$

$$102 = \frac{120}{100} P_c$$

$$\therefore P_c = 85$$

CLAVE “E”

2. El sueldo de un docente se le hace un primer aumento del 30 % en Enero y en el mes de Junio un aumento del 10 % sobre el sueldo de Mayo. ¿Qué porcentaje del sueldo del año anterior recibirá en Agosto?

A) 130 % B) 110 % C) 134 %
D) 143 % E) 140 %

RESOLUCIÓN

Aumentos: $\frac{\text{Enero}}{30\%}$; $\frac{\text{Junio}}{10\%}$

$$\therefore \text{En Agosto: } 130 \% (110 \%) = 143 \%$$

CLAVE “D”



3. A una asamblea de padres de familia asisten 240 personas de las cuales, las madres representan el 70 % de los asistentes. Si deseamos que el número de varones represente el 40 % del total de asistentes. Las parejas que deben de llegar a esta asamblea son:

- A) 110 B) 120 C) 130
D) 136 E) 140

RESOLUCIÓN

$$\text{Total} = 240 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Madres} = 70 \% (240) = 168 \\ \text{Padres} = 30 \% (240) = 72 \end{array} \right.$$

Si llegan “x” parejas se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \text{N}^\circ \text{ Madres} = 168 + x \\ \text{N}^\circ \text{ Padres} = 72 + x \end{array} \right\} \text{Nuevo total} = 240 + 2x$$

Dato:

$$\text{N}^\circ \text{ Padres} = 40 \% (\text{Nuevo total})$$

$$72 + x = \frac{40}{100} (240 + 2x)$$

$$\therefore x = 120$$

CLAVE “B”

4. Se tiene “n” camisas que cuestan s/. “p” cada una, si se venden un quinto al doble del precio de costo y el resto se vende con un 20 % por encima del precio de costo. la ganancia en % es:

- A) 24 % B) 30 % C) 36 %
D) 32 % E) 40 %

RESOLUCIÓN

Costo inicial: $np = 100 \% np$

$$\text{Costo final} = \overbrace{\frac{n}{5}(2p)}^{\text{1ra. venta}} + \overbrace{\frac{4n}{5}(120\% p)}^{\text{2da. venta}}$$

$$\text{Costo final} = \left[\frac{200\%}{5} + \frac{480\%}{5} \right] np = 136 \% np$$

$$\therefore \text{Ganancia} = 136 \% - 100 \% = 36 \%$$

CLAVE “C”



5. Un comerciante vende 2 artículos a s/. 2970 cada uno. En el primero gana el 10 % y en el segundo pierde el 10 %. Luego lo que ocurre es:

A) gana s/. 60 B) pierde s/. 60 C) gana s/. 30
D) s/. pierde s/. 30 E) no gana ni pierde

RESOLUCIÓN

Luego:

$$\text{Costo total: } 2700 + 3300 = 6000 \quad \ominus$$

$$\text{Venta total: } \underline{2970 + 2970 = 5940} \quad \downarrow$$

$$\therefore \text{ Pierde} = \text{s/. } 60$$

CLAVE "B"

6. Una casaca se rebaja en 10 % y 20% sucesivamente. El tanto por ciento que debe incrementarse el precio rebajado para que el nuevo precio sea 8 % más que el precio original es:

A) 30 % B) 25 % C) 50 %
D) 15 % E) 40 %

1er Artículo (Gana el 10 %)	2do Artículo (Pierde el 10 %)
$P_v = P_c + \text{Ganancia}$ $2970 = P_c + 10 \% P_c$ $2970 = 110 \% P_c$ $P_c = 2700$	$P_v = P_c + \text{Pérdida}$ $2970 = P_c - 10 \% P_c$ $2970 = 90 \% P_c$ $P_c = 3300$

RESOLUCIÓN

Precio de la casaca: 100 (suposición)

1º rebaja: 10 % $\Rightarrow$ Queda: 90 % (100) = 90

2º rebaja: 20 % $\Rightarrow$ Queda: 80 % (90) = 72

precio rebajado $\leftarrow$

Nuevo precio: $100 + 8 \% (100) = 108$

De 72 a 108 debe incrementar en 36

$$\therefore a \% (72) = 36 \rightarrow a = 50 \%$$

CLAVE "C"

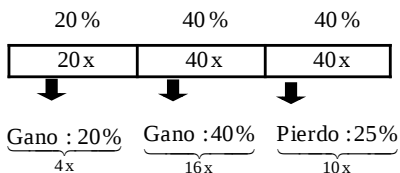


- 8.- Un lote de licuadoras se vende así: el 20 % ganando el 20 % de su precio d costo; la mitad el resto ganando el 40 % de su precio de costo. Finalmente, se vende el resto con una pérdida del 25 %. Si en la venta total se ganó 125 soles. Lo que costó todo el lote de licuadoras es:

- A) s/.1000 B) s/. 1250 C) s/. 1300
D) s/. 1450 E) s/. 1500

RESOLUCIÓN

Sea el costo: $100x$



$$\text{Luego: } 4x + 16x - 10x = 125 \Rightarrow x = \frac{25}{2}$$

$$\therefore \text{Costo del lote: } 100 \left(\frac{25}{2} \right) = \text{s/. 1250}$$

CLAVE "B"

- 9.- El radio de un cono se incrementa en 10 %. El tanto por ciento que varia su volumen:

- A) 11 % B) 15 % C) 17 %
D) 21 % E) 25 %

RESOLUCION

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}, \text{ para el problema: } V = R^2 h$$

Inicio	Final
$R = 10$	$R = 110 \% (10)$
$h = 1$	$= 11$
$V = 100$	$h = 1$
	$V = 121$

$$\therefore \text{Aumenta: } 121\% - 100\% = 21 \%$$

CLAVE "D"



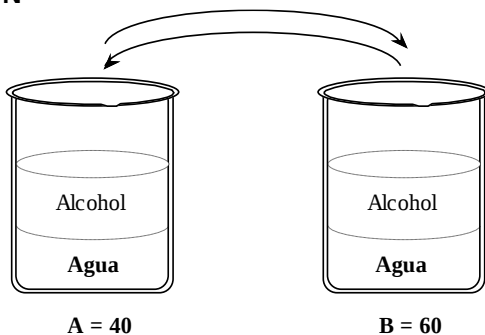
10.- Se tiene dos toneles con alcohol de diferente concentración. Uno contiene 40 litros y el otro 60 litros. La cantidad que se debe intercambiar para que ambos resulten con la misma concentración es:

- A) 12
D) 100

- B) 24
E) 20

- C) 30

RESOLUCION



$$\text{Intercambio} = \frac{AB}{A+B}$$

$$\therefore \text{Intercambio} = \frac{40(60)}{40+60} = \frac{2400}{100} = 24 \text{ litros}$$

CLAVE "B"

Ejercicios Propuestos



1. El 25 % de 280 es el 40 % más de que un número es:

- A) 20
D) 150

- B) 50
E) 70

- C) 100

2. ¿Qué porcentaje de "A" es "B"; si 30 % A = 50 % B?

- A) 33 %
D) 60 %

- B) 45 %
E) 52%

- C) 50 %



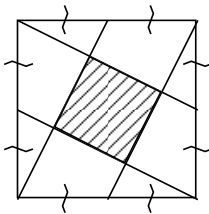
3. Tres descuentos sucesivos del 50 %; 70 % y 20% equivalen al descuento único de:
- A) 88 % B) 84 % C) 94 %
D) 90 % E) 78 %
4. Si el precio de un producto se rebaja en un 80 %. El porcentaje que hay que aumentar el nuevo precio para volver al original es:
- A) 160 % B) 16 % C) 80 %
D) 400 % E) 200 %
5. Nancy vendió un libro ganando el 20 % del precio de venta y el 10 % del precio de costo. Si lo vendió en s/. 748. El costo es:
- A) 544 B) 468 C) 642
D) 500 E) 512.
6. Si gastará el 30 % del dinero que tengo y ganara el 20 % de lo que me quedaría perdería 256 soles. Si gastaría el 60 % de lo que no gastaría, entonces lo que me quedaría es:
- A) 1000
B) 1500
C) 1200
D) 1300
E) 1100
7. Un comerciante vendió una máquina ganando el 60 % del precio de venta si hubiera vendido ganando el 60 % del costo, hubiera perdido s/. 11 3400. La máquina costó:
- A) 31 500 B) 32 500 C) 20 160
D) 31 700 E) 12 600
8. Se tiene 2 litros de solución de agua y alcohol al 20 % de alcohol. Si se agrega 1 litro de alcohol. El porcentaje de alcohol de la nueva mezcla es:
- A) 46,7 % B) 45 % C) 45,5 %
D) 45,7 % E) 40 %



9. De un depósito de 2000 litros de vino se saca el 20 % y se reemplaza por agua. Si esta operación se repite por 2 veces más. El vino que habrá al final es:

A) 1064 B) 1056 C) 1000
D) 1024 E) 1500

10. El porcentaje del área del cuadrado que representa la región sombreada es:



A) 30 % B) 25 % C) 20 %
D) 35 % E) 10 %

- 11.- Se vendieron dos televisores a 300 cada uno. En uno se ganó el 25 % y en el otro se perdió el 25 %. Lo que se ganó o se perdió en la venta de los dos televisores fue:

A) 40 soles B) 55 soles C) 20 soles
D) 75 soles E) 100 soles

- 12.- Se compra un artículo en s/. 160. El precio que debe fijarse para su venta al público para que haciendo un descuento del 20 % todavía se esté ganando el 25 % del costo es:

A) 640 B) 560 C) 100
D) 120 E) 250

- 13.- El porcentaje del área del rectángulo que representa el área sombreada es:

A) 50 B) 25 C) 37,5
D) 43,75 E) 31,25



- 14.- Del total de conferencista, el 60% son mujeres. De ellas el 30% disertan por primera vez; mientras que de los varones, el 50% lo hace por primera. El porcentaje de los conferencistas que disertan por primera vez es:
- A) 38 % B) 42 % C) 30 %
D) 45 % E) 35 %
- 15.- El 40% del 50% de "x" es el 30% de "y" ¿Qué porcentaje de $(2x + 7y)$ es $(x + y)$?
- A) 25 % B) 12,5 % C) 20 %
D) 10 % E) 22,5 %
- 16.- Una tela al lavarse se encoge el 10% en el ancho y 20% en el largo. Si se sabe que la tela tiene 2 metros de ancho. La longitud que debe comprarse, si se necesitan 36 metros cuadrados de tela después de lavada es:
- A) 28 B) 34 C) 25
D) 50 E) 75
- 17.- Tu tienes 25% menos de lo que yo tengo. Si yo tuviera el 20% más de lo que tengo y tu tuvieras 20% menos de lo que tienes, lo que tu tendrías serías/.48 menos de lo que yo tendría. El dinero que tienes tú es:
- A) S/.120 B) S/.60 C) S/.190
D) S/.90 E) S/.150
- 18.-Un recipiente estálleno de una mezcla de alcohol y agua al 60%. Si se extrae la mitad de la mezcla y se reemplaza por agua y luego se extrae la mitad de la nueva mezcla y se reemplaza por agua . La concentración final de la mezcla es:
- A) 45 % B) 60 % C) 65 %
D) 80 % E) 15 %



19.- En una fiesta de jóvenes el 60% de los asistentes son hombres y el resto mujeres. Luego llegan 40 muchachos cada uno con dos chicas y de esta manera todos están en pareja, El número de mujeres inicialmente fue:

- A) 20
D) 120

- B) 40
E) 60

C) 80

20.- Si el 84% de "N" es igual al $\frac{1}{55}$ de $(N - 120)$, el porcentaje de N que representa 192 es:

- A) 35%
D) 48%

- B) 32%
E) 52 %

C) 16%



CLAVES

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. B | 2. D | 3. A | 4. D | 5. A |
| 6. A | 7. E | 8. A | 9. D | 10. C |
| 11. A | 12. E | 13. E | 14. A | 15. A |
| 16. C | 17. B | 18. E | 19. C | 20. B |

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

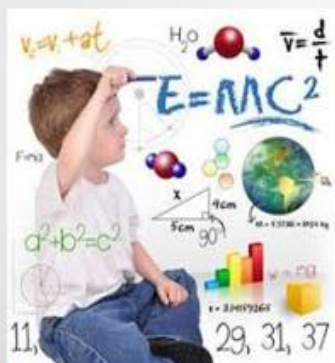
Gaita Iparraguirre, C. y otros (2014) Matemáticas para no Matemáticos (2ª edición). Perú: Estudios Generales PUCP.

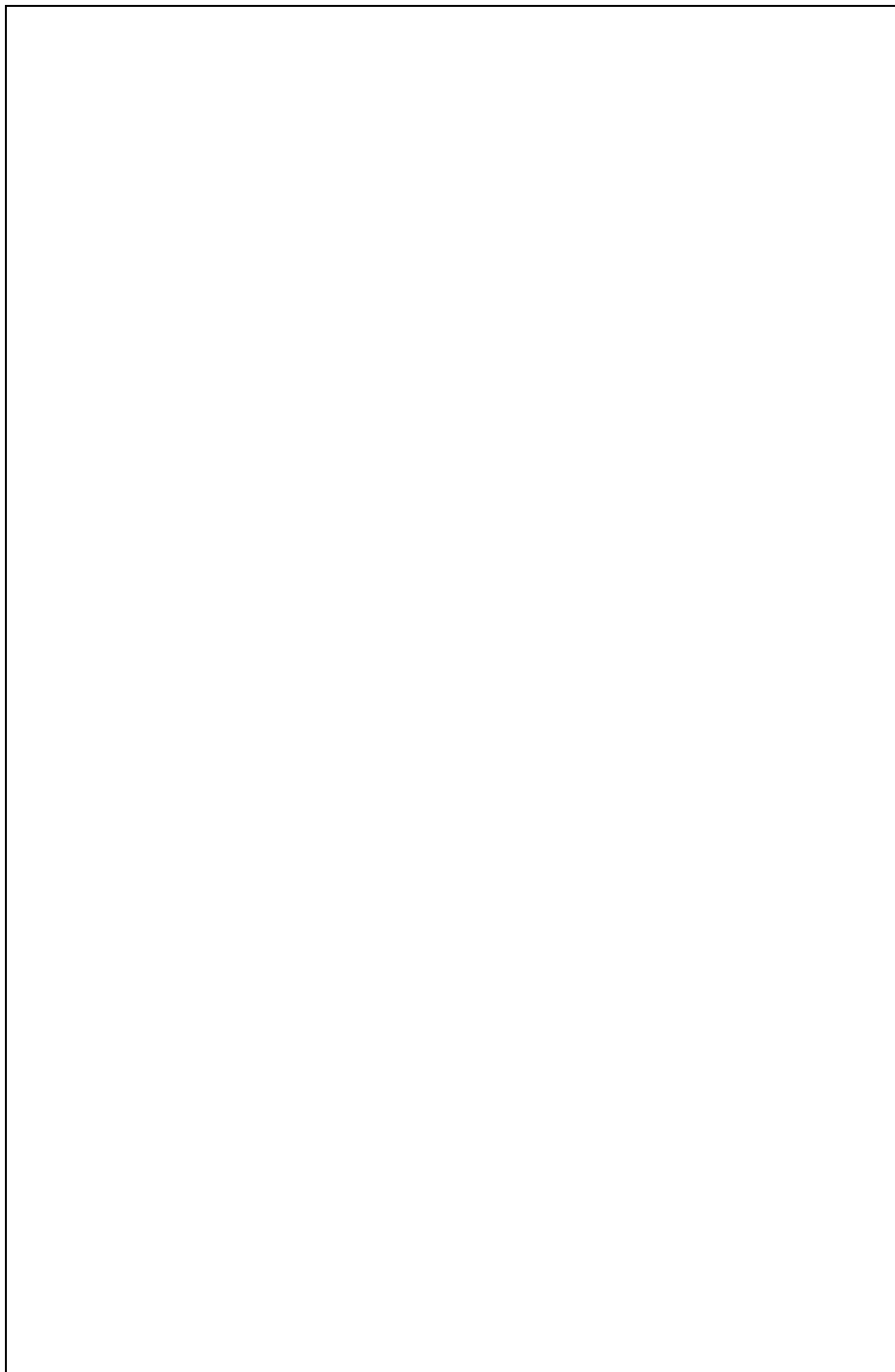
National Geographic (2012) La proporción áurea (2ª edición) España: EDITEC.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3ª edición). Perú: Moshera.



TERCER EXAMEN SUMATIVO





**SEMANA 11****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Plantear correctamente situaciones problemáticas e identificar las variables, es decir transformar el lenguaje común al lenguaje matemático.
2. Resolver situaciones problemáticas sobre ecuaciones de primer y segundo grado, exponenciales y logarítmicas.
3. Resolver las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones, aplicando correctamente los algoritmos adecuados: Algoritmo de Gauss, Método de eliminación, etc.



DIOFANTO Y LA ECUACIÓN

Desde el siglo XVII aC los matemáticos de Mesopotámia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones.



En el siglo XVI aC. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos. Ya para entonces tenían el "método de la falsa posición". No tenían notación simbólica pero utilizaron el jeroglífico hau (que quiere decir montón o pila) para designar la incógnita.

Los matemáticos griegos no tuvieron problemas con las ecuaciones lineales y, exceptuando a Diophante (250 dC.), no se dedicaron mucho al

álgebra, pues su preocupación era mayor por la geometría.

Sobre la vida de Diophante aparece en los siglos V o VI un epigrama algebraico que constituye una ecuación lineal y dice:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años. De todo esto, deduce su edad"

El planteamiento de las ecuaciones en matemáticas responde a la necesidad de expresar simbólicamente los problemas y los pensamientos.

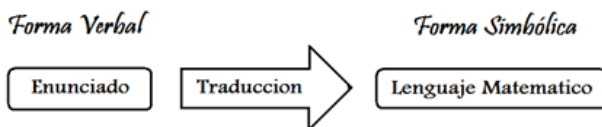


PLANTEO DE ECUACIONES

Uno de los motivos más interesantes de las matemáticas, consiste en el arte de interpretar (traducir) un problema en el lenguaje literal (vernáculo) a un lenguaje matemático, con ayuda de símbolos, variables y operaciones fundamentales. Este motivo se denomina “**Arte de plantear ecuaciones**”.

Para resolver un problema relativo a números o cantidades desconocidas se debe expresar una información escrita en idioma normal, en el simplificado idioma de las proposiciones matemáticas, las cuales nos permiten operar con más comodidad y rapidez que otros procedimientos. Esto implica realizar una especie de traducción de situaciones de la vida real, al simbolismo matemático, tarea que constituye el argumento más útil en todo el proceso de solución.

En líneas generales, plantear una ecuación consiste en traducir un lenguaje verbal a uno matemático usando simbología matemática.



A continuación presentamos un listado de frases típicas que suelen aparecer en los problemas, y a un costado su respectiva traducción matemática **usando siempre la menor cantidad de incógnitas**:

- El resultado de sumar un número a 7 $\Rightarrow 7 + x$
- La suma de algún número y 13 $\Rightarrow x + 13$
- El resultado de restar a 18 algún número $\Rightarrow 18 - x$
- Dos veces la suma de un número y 5 $\Rightarrow 2(x + 5)$
- Tres menos de dos veces un número $\Rightarrow 2x - 3$
- Tres menos dos veces un número $\Rightarrow 3 - 2x$
- La suma de dos números consecutivos mas 3 equivale a $x + (x + 1) + 3$
- x es a y como 3 es a 5 $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ ó $(x = 3k \wedge y = 4k)$
- A excede a B en 4 $\Rightarrow A = x + 4 \wedge B = x$



- Una vez mas significa el doble del número $\Rightarrow 2x$
- Dos veces mas equivale al triple del número $\Rightarrow 3x$

Nótese que cada vez que nos hemos referido a un número o algún número, en la traducción matemática, ésta se ha representado por una letra x , y ó z .

Ahora, cuando tengas que traducir una frase a una ecuación, debes determinar el significado de cada parte y asimismo tendrás que reconocer qué es lo que vas a reemplazar por una variable.

Ejemplos:

Un número, aumentado en 5 da como suma 23

$$\underbrace{\quad}_{n} + \underbrace{5}_{+5} = \underbrace{23}_{=23}$$

S/.6 menos que el costo de un sombrero es S/. 17

$$\underbrace{-6}_{-6} \underbrace{\quad}_{x} = \underbrace{17}_{=17}$$

$\Rightarrow x - 6 = 17$

Procedimiento para resolver problemas

La experiencia nos permite proponer que lo esencial para resolver un problema planteando ecuaciones, consiste en la habilidad para seguir cada uno de los siguientes pasos:

- 1) Representación de las cantidades desconocidas o incógnitas por variables (x , y , z , ... etc.).
- 2) Planteo de las ecuaciones que relacionan a las incógnitas con los datos del problema.
- 3) Solución de las ecuaciones planteadas; esto es, determinar los valores de las variables.
- 4) Prueba o verificación de los valores obtenidos para ver si cumplen las condiciones del problema.

No está demás afirmar que las etapas de representación y planteo, requieren la mayor concentración posible, pues al realizarlas correctamente se asegura una solución del problema.

Es por eso que a estas etapas les daremos mayor énfasis en los ejemplos que presentamos a continuación:



1. Traducir a su respectiva expresión matemática.

a) El triple, de un número aumentando en 8

.....

b) El triple de un número, aumentado en 8

.....

c) Lo que gana Ana es dos más de lo que gana Betty

.....

d) Ana gana dos veces lo que gana Betty

.....

e) Ana gana dos veces más lo que gana Betty

.....

f) Un número es dos veces menos que otro número

.....

g) La edad de Karina excede a la de Celeste en 19

.....

h) Lo que tiene A excede a B, tanto como 100 excede al doble de B

.....

i) La suma de cuatro impares consecutivos equivale al doble del mayor, más 6.

.....





- j) El doble, del cuadrado de un número disminuido en 6 equivale al exceso de 105 sobre el máximo número de dos cifras.

.....

- k) El cuadrado, del doble de un número disminuido en 3

.....

Ejemplo ilustrativo 1:

El cuadrado de un número, disminuido en 9 equivale a 8 veces el exceso del número sobre 2. Luego el menor número que satisface la ecuación es:

- A) 2 B) 4 C) 1
D) 6 E) 8

Resolución:

Sea “N” el número buscado e interpretando la información, tenemos:

$$N^2 - 9 = 8(N-2)$$

$$N^2 - 9 = 8N - 16$$

$$N^2 - 8N + 7 = 0$$

$$(N-7)(N-1) = 0$$

$$N-7 = 0 \quad \text{ó} \quad N-1 = 0$$

$$N = 7 \quad \quad \quad N = 1$$

CLAVE “C”

Ejemplo ilustrativo 2:

El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Dicho número es:

- A) 2 B) 3 C) 7
D) 6 E) 8

RESOLUCIÓN

Sea “N” el número.

Del primer párrafo obtenemos:

$$8N - 60$$

Del segundo párrafo obtenemos:

$$60 - 7N$$

Las cuales son equivalentes

$$\therefore 8N - 60 = 60 - 7N$$

$$15N = 120$$

$$N = 8$$

CLAVE “E”

**Ejercicios Resueltos**

1.-Compré el cuádruple del número de caballos que vacas, si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más, el número de caballos sería 2 veces mayor que el número de vacas. El número de caballos que compré es:

- A) 50
D) 70

- B) 40
E) 100

- C) 80

Resolución

Del primer párrafo encontramos:

Caballos: $4x$

Vacas : x

Del segundo párrafo obtenemos:

Caballos: $4x + 5$

Vacas: $x + 5$

Caballos sería 2 veces mayor que vacas

3

$$4x + 5 = 3(x+5)$$

$$4x + 5 = 3x + 15$$

$$x = 10$$

⇒ caballos comprados son:

$$4(10) = 40$$



CLAVE "B"

2.-En cada día, de lunes a jueves, gané \$6 más que lo que gané el día anterior. Si el jueves gané el cuádruple de lo que gané el lunes, ¿Cuánto gané el miércoles?

- A) 20
D) 45

- B) 18
E) 60

- C) 36

**RESOLUCIÓN**

De la información obtenemos que:

Lunes	:	x	←
Martes	:	$x + 6$	←
Miércoles	:	$x + 12$	←
Jueves	:	$x + 18$	←

Además lo del jueves es el cuádruple del lunes; Es decir:

$$x + 18 = 4x$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

El miércoles gané: $6 + 12 = \text{S/. } 18$

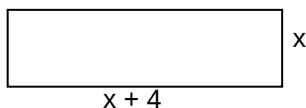
CLAVE "B"

- 3.-El largo de una sala excede a su ancho en 4 m. Si cada dimensión aumentara 4 m, el área aumentaría al doble. Las dimensiones de la sala son:

- A) 20 y 24m.
- B) 10 y 14 m.
- C) 6 y 10m.
- D) 8 y 12 m.
- E) 18 y 22 m.

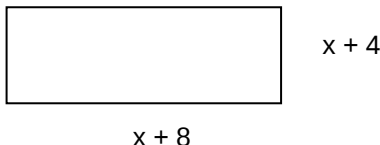
RESOLUCIÓN

Haciendo el esquema de una sala, para la primera condición, tenemos:



$$A_1 = x(x + 4)$$

Si las dimensiones aumentarían en 4 m tendríamos:





$$A_2 = (x+4)(x+8)$$

Del dato tenemos que: $A_2 = 2A_1$

$$\Rightarrow (x+4)(x+8) = 2x(x+4)$$

$$x+8 = 2x$$

$$x = 8$$

$\therefore$ dimensiones **8 m y 12 m.**

CLAVE “D”

- 4.- Una mecanógrafa escribe 85 palabras por minuto. Empieza su trabajo a las 8:00 am; y 40 minutos después, empieza otra mecanógrafa que escribe 102 palabras por minuto.

La hora en que ambas mecanógrafas habrán escrito el mismo número de palabras fue:

A) 2 pm.

B) 10 am.

C) 6 pm.

D) 8 pm.

E) 12pm.

RESOLUCIÓN

La 1º mecanógrafa escribe 85 palabras por minuto, entonces:
en x minutos escribirá: $85x$

La 2º mecanógrafa escribe 102 palabras por minutos, y empieza 40 min después, entonces:

en $(x-40)$ min escribirá: $102(x-40)$

Como las mecanógrafas han escrito el mismo número de palabras:

$$102(x-40) = 85x$$

$$102x - 4080 = 85x$$

$$17x = 4080$$

$$x = 240 \text{ min (4 horas)}$$

$$\Rightarrow \text{hora } 8 \text{ a.m.} + 4 \text{ h} = \mathbf{12 \text{ pm}}$$

CLAVE “E”

- 5.- En un aula los alumnos están agrupados en bancas de 6 alumnos por banca. Si se les coloca en bancas de 4 alumnos por banca se necesitarían 3 bancas más. Los alumnos que hay en el aula son:

A) 22

B) 16

C) 42

D) 36

E) 12

**RESOLUCIÓN**

Sea N el número de alumnos en el aula y " x " el número de bancas.

Al agruparlos de 6 en 6 tenemos:

$$N = 6x$$

Al agruparlos de 4 en 4 tenemos:

$$N = 4(x+3)$$

Como son iguales entonces

$$6x = 4x + 12$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

Finalmente $N = 6 \cdot 6 = 36$ alumnos

CLAVE "D"

- 6.- Con 950 ladrillos se han hecho tres muros. En el primero entran una tercera parte más que el segundo, y en este la cuarta parte de los que entran en el tercero. Los ladrillos que se emplearon en el segundo muro fueron:

A) 212

B) 150

C) 140

D) 360

E) 120

RESOLUCIÓN

Si la cantidad de ladrillos en el segundo muro consideramos como $3x$, entonces la tercera parte será x ; por lo tanto:

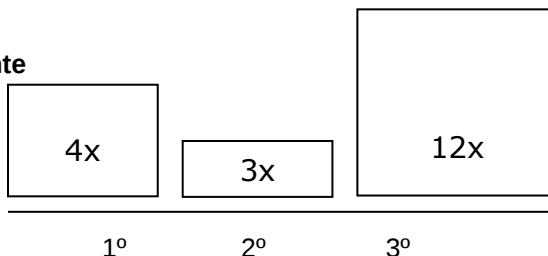
Segundo muro: $3x$

Primer muro: $3x + x = 4x$

Los ladrillos del segundo muro son la cuarta parte de los del tercer muro; esto quiere decir también que lo que hay en el tercero es el cuádruple de lo que hay en el segundo; es decir:

$$4(3x) = 12x.$$

Gráficamente





Sumando todos los ladrillos debemos tener 950.

$$4x + 3x + 12x = 950$$

$$19x = 950$$

$$x = 50$$

Primer muro : 200

Segundo muro : 150

Tercer muro : 600

CLAVE "B"

- 7.- Se tiene tres números tales que el segundo es $\frac{4}{5}$ del primero, el tercero es $\frac{3}{4}$ del segundo y el producto de los tres números es 3840. El menor es:

A) 12

B) 15

C) 14

D) 36

E) 12

RESOLUCIÓN

Sea N_1 , N_2 y N_3 los tres números

$$N_2 = \frac{4}{5} N_1 \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = \frac{4}{5}$$

$$N_3 = \frac{3}{4} N_2 \Rightarrow \frac{N_3}{N_2} = \frac{3}{4}$$

De esta proporcionalidad obtenemos que:

$$N_2 = 4K$$

$$N_1 = 5K$$

$$N_3 = 3K$$

El producto es 3840

$$\Rightarrow (5K)(4K)(3K) = 3840$$

$$60K^3 = 3840$$

$$K^3 = 64$$

$$K = 4$$

$$\therefore \text{el menor es } N_3 = 3(4) = 12$$

CLAVE "A"



- 8.- Se reparte 3000 soles entre 4 personas de tal manera que a la primera le corresponda 400 soles más que a la segunda; a ésta, $\frac{4}{5}$ de lo que le corresponde a la tercera; y ésta 100 soles más de lo que le corresponde a la cuarta. ¿Cuánto recibió la segunda persona?

- A) 400 B) 500 C) 600
D) 300 E) 200

RESOLUCIÓN

Al repartir los S/. 3000 entre 4 personas y empezando el análisis entre la 2^{da} y 3^{era} persona, luego entre la 1^{era} y la 2^{da} y finalmente entre la 3^{era} y la 4^{ta} tendremos

$$3000 \left\{ \begin{array}{l} P_1 = 4k + 400 \\ P_2 = 4K \\ P_3 = 5K \\ P_4 = 5k - 100 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow 4k + 400 + 4k + 5k + 5k - 100 = 3000$$

$$18k = 2700$$

$$k = 150$$

∴ La segunda persona recibió:

$$4(150) = \text{S/. } 600$$

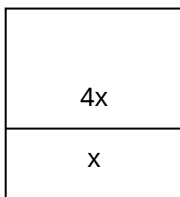
CLAVE "C"

- 9.- De un tonel de 140 litros se extrae tanto como 4 veces no se extrae, de lo que queda se extrae tanto como no se extrae. ¿Cuánto queda en el tonel?

- A) 14 B) 25 C) 40
D) 32 E) 28

RESOLUCIÓN

Graficando un tonel e interpretando la primera condición, tenemos:



$$4x + x = 140$$

$$5x = 140$$

$$x = 28$$

⇒ Ha quedado 28 litros



Graficando en un tonel lo que a quedado a lo nuevo que no se extrae, tenemos:

y
y

$$y + y = 28$$

$$\Rightarrow y = 14$$

$\therefore$ Queda en el tonel **14 litros**.

CLAVE “A”

10.- Él le dice a Ella: “Yo tengo el triple de la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tú tienes”. Los años de ambos, si sus edades suman 50 años son:

A) 36 y 14

B) 30 y 20

C) 35 y 15

D) 40 y 10

E) 32 y 18

RESOLUCIÓN

Empleando un cuadro para 2 personajes, en dos tiempos, tenemos:

	PASADO	PRESENTE
EL	Y	3X
ELLA	X	Y

Aplicando diferencia de edades, en el pasado y el presente, y teniendo en cuenta que no varía, tenemos:

$$y - x = 3x - y$$

$$y + y = x + 3x$$

$$2y = 4x$$

$$y = 2x$$

Del dato, que sus edades actuales suman 50 años:

$$3x + y = 50$$

$$3x + 2x = 50$$

$$x = 10$$



∴ El tiene $3x = 3(10) = 30$ años

Ella tiene y ; es decir: 20 años

CLAVE “B”

Ejercicios Propuestos



- Una fábrica contrata a un obrero con la siguiente condición: por cada día que trabaje le pagaran S/. 15 y por cada día que no trabaje le descontarán S/. 20 si luego de 30 días, el obrero sólo recibió S/. 170. Los días que trabajó son:
A) 8
B) 22
C) 23
D) 12
E) 24
- En una familia se cuentan varios niños y niñas. Alguien les pregunta ¿Cuántos son? y la niña mayor contesta que tiene tantos hermanos como dos veces el número de hermanas; pero el niño mayor dice que sus hermanos exceden a sus hermanas en 1. El total de niños es:
A) 10
B) 9
C) 8
D) 7
E) 11
- Tres amigos A, B y C juegan 3 apuestas entre sí, con la condición de que el que pierda duplique el dinero de los demás, si cada uno pierde una apuesta en el orden mencionado y al final terminan con S/. 80 cada uno inicialmente tenían:
A) S/. 100, S/. 20 y S/. 120
B) S/. 120, S/. 70 y S/. 50
C) S/. 180, S/. 20 y S/. 40
D) S/. 130, S/. 30 y S/. 80
E) S/. 130, S/. 70 y S/. 40
- Con todos los alumnos de un salón se puede formar un triángulo equilátero compacto. Si aumentáramos 66 alumnos entonces se podría formar con todos los alumnos un cuadrado compacto, en cuyo lado el número de alumnos es el mismo que hay en el lado del triángulo anteriormente mencionado. El número de alumnos que conforman el salón es:



-
- A) 70 B) 72 C) 76
D) 78 E) 82
5. A una fiesta asistieron 20 personas. María bailó con 7 muchachos, Olga con 8, Ana con 9 y así sucesivamente hasta llegar a Nina que bailó con todos ellos. Los muchachos que habían en la fiesta fueron:
- A) 12 B) 13 C) 15
D) 18 E) 21
6. Un día Juanito salió de compras con sus cuatro amigas, gastó en pasajes de ida S/. 10, con la mitad del resto compró dos regalos para Isabel y Marlene; para Juana le compró un regalo de S/. 80, con la mitad del nuevo resto y S/. 40 más, compró una cartera para Rocío; cuando él quiso comprarse un libro observó que le faltaba dinero por lo cual Isabel le prestó duplicándole el dinero que le había quedado, entonces se compró un libro de S/. 50 y se quedó solamente con S/. 10, para el pasaje de vuelta. El dinero de Juanito es.
- A) S/. 400 B) S/. 410 C) S/. 420
D) S/. 450 E) S/. 460
7. Luis observó en cierto año del presente siglo, que el cuadrado de su edad era igual al año de su nacimiento, y que la edad de su primo Pedro era igual a la suma de las cifras del año en que él había cumplido 20 años. La edad que tendrá Pedro cuando Luis cumpla los 60 años es:
- A) 36 años B) 35 años C) 37 años
D) 38 años E) 39 años
8. Unos gemelos y unos trillizos tienen edades que suman en total 150 años. Si se intercambian las edades de los gemelos con los trillizos, el total sería de 120 años. Los años que tiene cada uno de los trillizos son:
- A) 50 B) 32 C) 46
D) 44 E) 42



9. Estando reunidos el día de ayer, 20 alumnos procedieron a sumar los años de nacimiento de cada uno y por otro lado se sumó las edades también de cada uno, dando como resultado global 39916. El número de alumnos que todavía no cumplieron años en el presente es: (año actual: 1996)
- A) 4 B) 5 C) 3
D) 2 E) 6
10. Para los premios de un concurso infantil se necesitaba comprar juguetes de dos precios distintos. Los precios eran S/. 4 y S/. 5, pero debía comprarse la mayor cantidad posible de juguetes. La cantidad de niños que serían premiados, si se debía gastar 131 soles y cada niño recibió un juguete es:
- A) 30 B) 31 C) 32
D) 43 E) 35
11. Hace tantos años como la cuarta parte de los años que tengo, nuestras edades sumaban 42 años y dentro de tantos años, como la tercera parte de los años que tienen nuestras edades sumarán 74 años La edad que tengo es:
- A) 20 B) 30 C) 24
D) 28 E) 22
12. Yo tengo 2 veces más de la edad que tu tuviste, cuando yo tuve una vez más de la edad que tuviste, cuando yo tuve 3 veces menos la edad que tengo. La edad que tendrás cuando yo tenga el doble de la edad que tuviste hace 5 años. Si nuestras edades suman 34 años es.
- A) 18 años B) 16 años C) 20 años
D) 22 años E) 26 años
13. Yo tengo el doble de la edad que tú tenías cuando él tenía la mitad de la edad que tienes y cuando él tenga la edad que tengo, yo tendré el triple de lo que él tenía cuando tu tenías lo que ya te dije y tu tendrás el doble de la edad que tenías hace 7 años. La suma de tu edad y la mía es:
- A) 44 B) 41 C) 40
D) 43 E) 42



14. Si hubieran pasado 3 veces los años que han pasado, me faltaría la tercera parte de los años que supongo que pasaron, para duplicar la edad que tengo, y la suma de esta supuesta edad actual con mi edad actual real sería 80 años. ¿Qué edad tengo?
- A) 30 B) 50 C) 36
D) 45 E) 27
15. Dos móviles parten de un mismo punto, uno se aleja en dirección norte con rapidez constante de 20 m/s y el otro en dirección este con rapidez constante de 15 m/s. ¿En qué tiempo estarán separados 36 km?
- A) 18 min B) 24 min C) 36 min
D) 20 min E) 28 min
16. El lobo feroz observa a Caperucita desde una distancia “d” que separa a ambos, luego empieza a perseguirla hasta alcanzarle, después que Caperucita a recorrido una distancia que excede en 15 m a lo que los separaba al comienzo. Si sus rapideces son 6m/s y 4m/s respectivamente. Hallar la distancia que recorrió el lobo feroz.
- A) 20 m B) 30 m C) 55 m
D) 45 m E) 50 m
17. Un motociclista y un patinador se desplazan en línea recta, en la misma dirección y rapideces constantes de 20 m/s y 5 m/s respectivamente. Si inicialmente están separados 50 m, además el tiempo transcurrido hasta que el más veloz se encuentre a 25 m más adelante con respecto al otro es “t” seg. ¿A qué rapidez debe viajar el motociclista si quiere recorrer todo el tramo analizado en (t-1) seg?
- A) 30 m/s B) 18 m/s C) 17 m/s
D) 32 m/s E) 25 m/s



18. Un campanario señala las horas con igual número de campanadas. Si para indicar las 5:00 am, demora 6 segundos. ¿Cuánto demorará para indicar las 12:00?
- A) 15 s B) 12 s C) $33/2$ s
D) 14 s E) 16 s
19. Las edades de tres jóvenes están en progresión aritmética creciente cuya suma es 39, si la suma de sus cuadrados es 515, la edad del menor es:
- A) 11 B) 13 C) 15
D) 17 E) 19
20. Dados tres números enteros consecutivos, la tercera parte del menor menos 10 es mayor que 14, la cuarta parte del mayor mas 10 es menor que 29. La suma de las cifras del número menor es:
- A) 12 B) 10 C) 18
D) 11 E) 15
21. Un comerciante Huaranchalino ha comprado dos cajones de chifles en 4800 soles conteniendo cada uno 150 paquetes de chifles. El primer cajón le ha costado 600 soles mas que el segundo. El comerciante ha hecho después una venta de 70 paquetes del primer cajón y 30 del segundo, cobrando por todo 2000 soles. La ganancia, en soles, en esta venta es:
- A) 250 B) 270 C) 280
D) 300 E) 320
22. Don Jorge tiene una soga de 10 m de longitud y la corta en dos partes. Con una de ellas forma un cuadrado y con la otra forma un círculo. Si las áreas de las figuras formadas son mínimas entonces el perímetro del cuadrado, en metros, es:
- A) $\frac{20}{4+\pi}$ B) $\frac{10}{4+\pi}$ C) $\frac{30}{4+\pi}$
D) $\frac{40}{4+\pi}$ E) $\frac{50}{4+\pi}$

**CLAVES**

1. B	2. A	3. E	4. D	5. B
6. D	7. C	8. E	9. A	10. C
11. C	12. C	13. A	14. A	15. D
16. D	17. E	18. C	19. A	20. B
21. E	22. D			

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

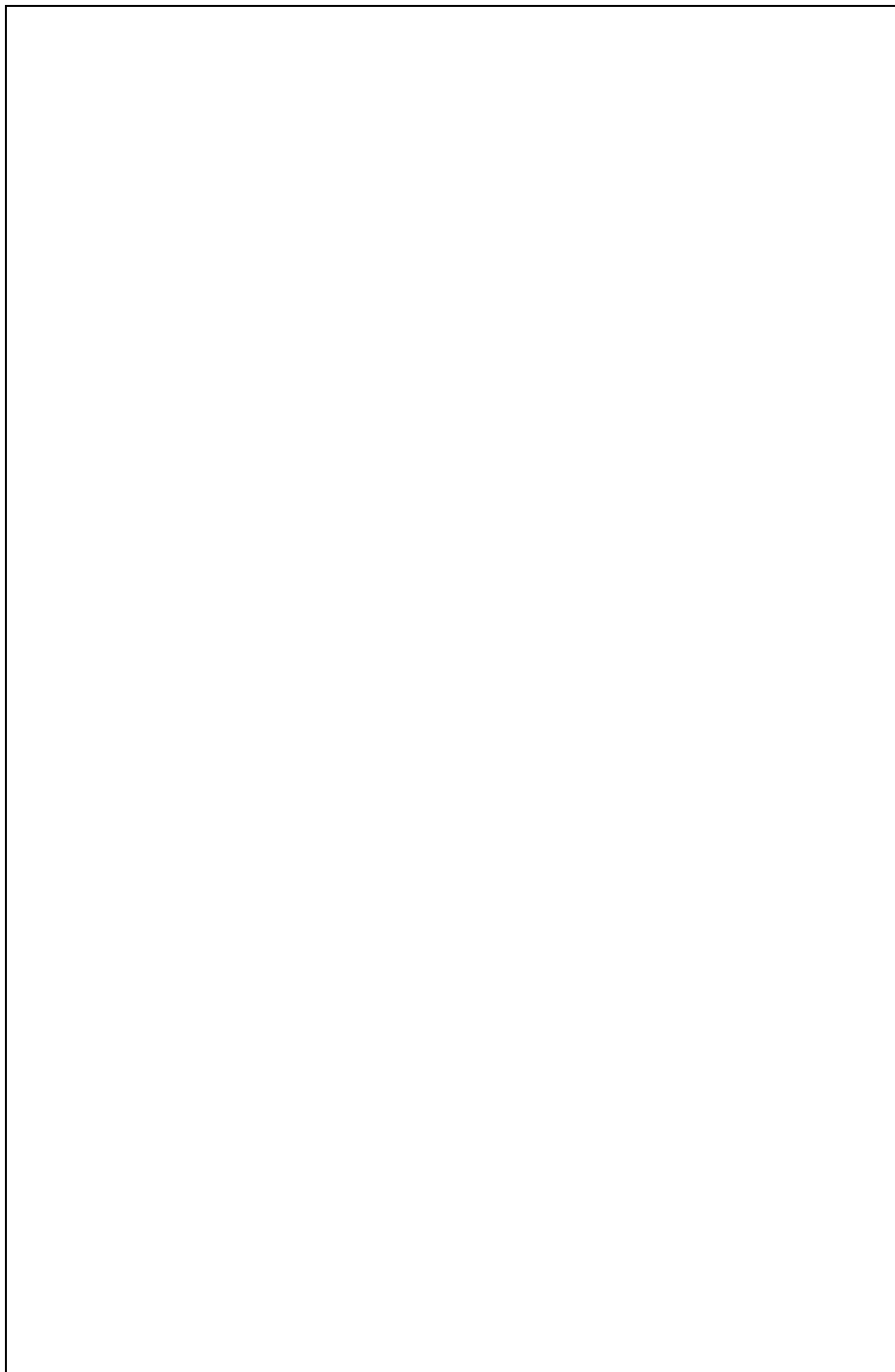
Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Casacuberta Vergés, C. (2012) Calculus una y varias variables (4ª edición). España: Reverté.

Gaita Iparraguirre, C. y otros (2014) Matemáticas para no Matemáticos (2ª edición). Perú: Estudios Generales PUCP.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3ª edición). Perú: Moshera.

Pozo Montero, F. , Parés Mariné, N. y Vidal Seguí, Y. (2015) Matemáticas para la ingeniería (2ª edición). España: Pearson Educación.



**SEMANA 12****OBJETIVOS**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Identificar y plantear las inecuaciones que se forman en los diversos problemas que se planteen.
2. Aplicar las propiedades de las desigualdades para resolver las inecuaciones planteadas.
3. Resolver situaciones problemáticas aplicando propiedades de las inecuaciones.



LA MATEMÁTICA DE LA APROXIMACIÓN

Una de las obras más antiguas de la Matemática que se conocen fue elaborada en Egipto, hace unos 3 600 años. Allí surgió el álgebra, una ciencia que mezcla los números con las letras siendo una de sus variantes las inecuaciones.



El primero en usar símbolos para indicar desigualdades, "menor que" y "mayor que" fue el matemático inglés Thomas Harriot.

El significado de las inecuaciones es parecido al de las ecuaciones sin embargo ocurre que son menos concretas pues las soluciones de una inecuación (del grado que sean) no van a ser ni una, ni dos, ni tres, pueden incluso ser infinitas. Por ejemplo: "Una mesa mide 140 centímetros. La mido con la palma de mi mano y con seis palmos me quedo corto" ¿qué se puede saber de la longitud de mi mano? Evidentemente con estos datos no se puede saber cuánto mide mi mano pero lo que sí se puede saber es que esta longitud tiene que ser menos que $140/6 = 23.30$ cm (simplemente pensando que seis veces mi mano es más corto que los 140 cm de la mesa). Este problema se puede plantear como la inecuación de primer grado: $6x < 140$ es decir $x < 140/6$ obteniéndose que $x < 23.30$ cm.

Los matemáticos suelen usar inecuaciones para aproximarse a cantidades cuyas fórmulas exactas no pueden ser fácilmente computadas.

Una de las principales aplicaciones de las inecuaciones es la referida a problemas de decisión y de optimización al tratar de programar una situación con la finalidad de maximizar los beneficios/ganancias o minimizar los costos de producción.

**1.- DESIGUALDAD**

Es toda relación que se establece entre dos números reales y que señala que tienen diferente valor.

Axiomas de orden: Sean a , b y c tres cantidades reales entonces:

- **(A1) Axioma de tricotomía** : Una solamente una de las siguientes relaciones se verifica:

$$a < b \quad \text{o} \quad a = b \quad \text{o} \quad a > b$$

- **(A2) Axioma de transitividad o adición:**

a. Si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

b. Si $a > b \Rightarrow a + c > b + c$

Consideremos los siguientes casos:

- i. Si $-6 < 4$ entonces $-6 + 3 < 4 + 3$ es decir $-3 < 7$
- ii. Si $2 > -5$ entonces $2 - 9 > -5 - 9$ es decir $-7 > -14$

- **(A3) Axioma de multiplicación:**

a. Si $a < b \Rightarrow ac < bc$, $\forall c > 0$

b. Si $a < b \Rightarrow ac > bc$, $\forall c < 0$

Consideremos los siguientes casos:

- i. Si $-3 < 7$ entonces $(-3)(5) < 4(5)$ es decir $-15 < 20$
- ii. Si $-6 < 4$ entonces $(-6)(-2) > 4(-2)$ es decir $12 > -8$

2.- PROPIEDADES RELATIVAS A DESIGUALDADES:

- Para todo número real a , $a^2 \geq 0$

Consideremos los siguientes casos:

- i. Si $0 < 6 \leq w$ entonces $0 < 36 \leq w^2$
- ii. Si $w = 0$ entonces $w^2 = 0$
- iii. Si $w \leq -7 < 0$ entonces $0 < 49 \leq w^2$



- Si los números reales a, b tienen el mismo signo entonces:

a. Si $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

b. Si $a < b < 0 \Rightarrow 0 > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Consideremos los siguientes casos:

i. Si $0 < w < 3$ entonces $\frac{1}{w} > \frac{1}{3} > 0$

ii. Si $-4 < w < 0$ entonces $0 > \frac{1}{-4} > \frac{1}{w}$

es decir $0 > \frac{-1}{4} > \frac{1}{w}$

- Dado el número real $b > 0$ y $a^2 \geq b$,

- se cumple que $a \geq \sqrt{b}$ ó $a \leq -\sqrt{b}$

Consideremos el siguiente caso:

Si $w^2 \geq 8$ entonces $w \geq \sqrt{8}$ ó $w \leq -\sqrt{8}$

es decir $w \geq 2\sqrt{2}$ ó $w \leq -2\sqrt{2}$

- Dado el número real $b > 0$ y $a^2 \leq b$

- ,se cumple que $-\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$

Consideremos el siguiente caso:

Si $w^2 \leq 5$ entonces $-\sqrt{5} \leq w \leq \sqrt{5}$

- Dada la siguiente desigualdad: $0 < a \leq b \leq c$

- entonces $a^2 \leq b^2 \leq c^2$

Consideremos el siguiente caso:

Si $0 < 2 \leq w \leq 9$

entonces $(2)^2 \leq w^2 \leq (9)^2 \Rightarrow 4 \leq w^2 \leq 81$

- Dada la siguiente desigualdad: $a \leq b \leq c < 0$

- entonces $c^2 \leq b^2 \leq a^2$



Consideremos el siguiente caso:

$$\text{Si } -6 \leq w \leq -2 < 0$$

$$\text{entonces } (-2)^2 \leq w^2 \leq (-6)^2 \Rightarrow 4 \leq w^2 \leq 36$$

- Dadas las desigualdades: $a < 0 < c$ y $a \leq b \leq c$
- entonces $0 \leq b^2 \leq \text{Máximo}\{a^2; c^2\}$

Consideremos los siguientes casos:

- i. Si $-5 \leq w \leq 3$ entonces

$$0 \leq w^2 \leq \text{Máximo}\{(-5)^2; (3)^2\} = 25$$

- ii. Si $-4 \leq w \leq 7$ entonces

$$0 \leq w^2 \leq \text{Máximo}\{(-4)^2; (7)^2\} = 49$$

- Media geométrica $\leq$ Media aritmética
- Si $a \in R^+$ entonces $a + \frac{1}{a} \geq 2$
- Si $a \in R^-$ entonces $a + \frac{1}{a} \leq -2$

Ejemplo ilustrativo 1

Indica con verdad (V) o falso (F) cada proposición:

- a. $\forall a, b \in R - \{0\}, a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- b. $\forall a, b \in R, a > 0 \wedge -b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- c. $\forall a, b \in R, a < b \Rightarrow a^2 < b^2$
- d. $\forall a, b \in R, a > 0 \wedge -b > 0 \Rightarrow b(b-a) > 0$
- e. $\forall a, b \in R, a < b \Rightarrow a^3 < b^3$

- A) FVVFV
D) VFVFF

- B) VFVFF
E) FVFFV

- C) VFVFV

**RESOLUCIÓN**

- a. Proposición falsa

Se da un contraejemplo a la afirmación dada. Si $-3 < 4$ entonces

$$\frac{1}{-3} < \frac{1}{4}$$

- b. Proposición verdadera

Como $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$ y $-b > 0 \Rightarrow b < 0 \Rightarrow 0 > \frac{1}{b}$ se tiene que

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

- c. Proposición falsa

Dando un contraejemplo. Si $-7 < 2$ entonces $(2)^2 < (-7)^2$ es decir $4 < 49$

- d. Proposición verdadera

Como $-b > 0 \Rightarrow b < 0$ y $0 < a$ se tiene que $b < 0 < a \Rightarrow b - a < 0$. De lo anterior, $b(b - a) > 0$

- e. Proposición verdadera

Dando un contraejemplo. Si $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ entonces $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ es

decir $\frac{1}{8} > \frac{1}{27}$

Por tanto, FVFVV

CLAVE "C"

**Ejemplo ilustrativo 2**

Sean $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $x_1 x_2 x_3 \dots x_n = 1$ entonces el menor valor de $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ es:

- A) n^n B) n^2 C) $2n$
D) $\sqrt[n]{n}$ E) n

RESOLUCIÓN

Aplicando la propiedad relativa a desigualdades (D8): La media aritmética es menor o igual que la media geométrica para $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ entonces se tiene que:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \dots x_n} = \sqrt[n]{1} = 1 \text{ luego}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq n$$

CLAVE "E"**Ejemplo ilustrativo 3**

Si $m, n \in \mathbb{R}^+$ entonces el menor valor de $\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}$ es:

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

RESOLUCIÓN

Como $m, n \in \mathbb{R}^+$ entonces $\frac{m}{n} \in \mathbb{R}^+$.

Sea $a = \sqrt{\frac{m}{n}} > 0$ entonces aplicando la propiedad relativa a desigualdades (D9) se tiene que:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}} \geq 2$$

CLAVE "B"**3.- INECUACIÓN**



Es toda desigualdad condicional que contiene una o más cantidades desconocidas denominadas variables y que sólo es verdadera para determinados valores de dicha variable las cuales hallan contenidos en el conjunto solución expresado generalmente en intervalos.

Ejemplo ilustrativo 4

Un grupo de parejas de esposos asisten al estadio Chan Chán para participar de un concierto y en la boletería les dicen: Si compran las entradas de S/. 15 les faltará dinero y si compran entradas de S/. 10 les sobrará dinero. Sabiendo que disponen de S/. 120, el número de personas que conforman el grupo es:

- A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

RESOLUCIÓN

Sea n el número de parejas:

Compran entradas de S/. 15: $15(2n) > 120 \Rightarrow n > 4$

Compran entradas de S/. 10: $10(2n) < 120 \Rightarrow n < 6$

Como $4 < n < 6 \Rightarrow n = 5$ parejas

Número de personas: $2n = 2(5) = 10$ personas

CLAVE “C”

Ejemplo ilustrativo 5:

En una caja hay una cantidad impar de fichas de diferentes colores: Blancas, rojas y amarillas. Se sabe que el doble de fichas blancas más las fichas rojas no es mayor que 35 ni menor que 32. Asimismo, las fichas blancas más el doble de fichas amarillas es mayor que 17 y menor que 20. Además, el doble de las fichas rojas más las fichas amarillas es menor que 37 y mayor que 33. El número de fichas que hay en total es:

- A) 19
B) 22
C) 29
D) 31
E) 33

RESOLUCIÓN



Sean:

A : Número de fichas amarillas

B : Número de fichas blancas

R : Número de fichas rojas

La inecuación (i) : $32 \leq 2B + R \leq 35$

La inecuación (ii) : $17 < B + 2A < 20$

La inecuación (iii) : $33 < 2R + A < 37$

Sumando cada lado de las inecuaciones anteriores se tiene que:
 $82 < 3(A + B + C) < 92 \Rightarrow 27, \dots < A + B + C < 30, \dots \Rightarrow (A + B + C) \in \{28, 29, 30\}$

Además, $A + B + C$ es impar concluyendo que $A + B + C = 29$

CLAVE "C"

4.- SOLUCIÓN DE INECUACIONES

A continuación se presenta una serie de pasos para determinar el conjunto solución de una inecuación:

Ejemplo ilustrativo 6

Resolver la inecuación $\frac{(-x + 2)(x^2 - 9)(x^2 + 5)}{(x + 7)} \geq 0$

RESOLUCIÓN

Paso 1: Separar los factores que tenga definida su signo, así $x^2 + 5 \geq 5 > 0$ entonces tiene signo positivo y se puede separar de la inecuación quedando lo siguiente:

$$\frac{(-x + 2)(x^2 - 9)}{(x + 7)} \geq 0$$

Paso 2: Comprobar que las variables tengan grado uno, de no ser así, factorizar y/o aplicar el Paso 1. En este caso, expresar $x^2 - 9$ como $(x + 3)(x - 3)$ quedando la inecuación de la siguiente manera:

$$\frac{(-x + 2)(x + 3)(x - 3)}{(x + 7)} \geq 0$$



Paso 3: Comprobar que las variables tengan signo positivo, de no ser así, cambiar el signo al factor así como también cambiar el sentido a la desigualdad. Así tenemos que la inecuación queda:

$$\frac{(x-2)(x+3)(x-3)}{(x+7)} \leq 0$$

Paso 4: Determinar los puntos críticos. Éstos se determinan igualando cada factor a cero, así:

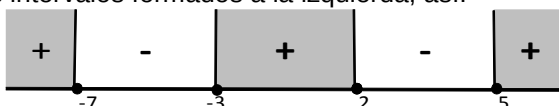
Punto crítico 1: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Punto crítico 2: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Punto crítico 3: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Punto crítico 4: $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

Paso 5: Colocar los puntos críticos sobre una recta numérica determinándose una serie de intervalos. Colocar el signo “+” al intervalo extremo derecho, de allí intercalar con el signo “-” para cada uno de los intervalos formados a la izquierda, así:



Paso 6: El conjunto solución se toma de la siguiente manera

- Los intervalos de signos positivos si la inecuación es “mayor o igual que” o simplemente “mayor que” cero.
- Los intervalos de signos negativos si la inecuación es “menor o igual que” o simplemente “menor que” cero.

Para el presente caso, la inecuación del Paso 3 quedó “menor o igual que” cero, por tanto, el conjunto solución es:

$$\langle -\infty; -7 \rangle \cup [-3; 2] \cup [5; +\infty)$$

Ejemplo ilustrativo 7

El conjunto de todos los números reales $\frac{x}{81}$ tal que x es siempre menor que su inverso es:

- A) $\langle 0; 81 \rangle$ B) $\langle -\infty; -81 \rangle \cup \langle 0; 81 \rangle$ C) $\langle -\infty; 81 \rangle$
 D) $\langle -81; 0 \rangle \cup \langle 81; +\infty \rangle$ E) $\langle -81; 0 \rangle$

**RESOLUCIÓN**

$$\frac{x}{81} < \frac{81}{x} \Rightarrow \frac{x^2 - 81^2}{81x} < 0 \text{ de donde se obtiene que}$$
$$\frac{(x + 81)(x - 81)}{x} < 0$$

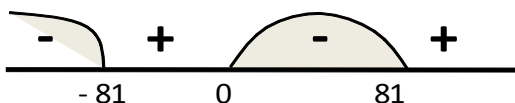
Puntos críticos:

Punto crítico 1: $x + 81 = 0 \Rightarrow x = -81$

Punto crítico 2: $x - 81 = 0 \Rightarrow x = 81$

Punto crítico 3: $x = 0$

Intervalos:



Conjunto solución:

Como la desigualdad es menor entonces tomamos los intervalos con signo negativo.

El conjunto solución es:

$$x \in \langle -\infty; -81 \rangle \cup \langle 0; 81 \rangle$$

CLAVE "B"

Ejercicios Resueltos

1. Santos piensa fabricar un determinado número de pelotas. Al enterarse de la gran demanda fabricó el triple de lo pensaba producir y vendió 80, quedándole más de 31. Luego fabricó 12 más y vendió 37 quedándole menos de 12. El número total de pelotas que se fabricó es:
- A) 38 B) 76 C) 114
D) 117 E) 126

**RESOLUCIÓN**

Sea x : Cantidad de pelotas que se fabricó al inicio

De la segunda sentencia del enunciado: $3x - 80 > 31 \Rightarrow x > 37$

..... (i)

De la tercera sentencia del enunciado:

$$[(3x - 80) + 12] - 37 < 12 \Rightarrow x < 39 \text{ (ii)}$$

De (i) y (ii) se tiene que $37 < x < 39 \Rightarrow x = 38$

CLAVE "A"

2. Se quintuplica un número impar " x " que tiene dos cifras. Se le agrega 21, luego se extrae su tercera parte, obteniéndose " M ". Sin embargo, si se extrajere la mitad del número anterior al doble de " x " resulta " N ". Además, se sabe que $M - N < x$ entonces la cantidad de valores que puede tomar " x " es:

A) 31

B) 33

C) 35

D) 37

E) 39

RESOLUCIÓN

$$M = \frac{5x + 21}{3}$$

$$N = 2x - \frac{M}{2} = 2x - \frac{5x + 21}{6} = \frac{7x - 21}{6}$$

Además, se sabe que: $M - N < x$ entonces

$$\frac{5x + 21}{3} - \frac{7x - 21}{6} < x \text{ entonces } 21 < x \text{ y } x \text{ es impar. Por tanto}$$

$x \in \{23; 25; 27; 31; \dots; 99\}$ siendo la cardinalidad de dicho conjunto

$$\frac{99 - 23}{2} + 1 = 39 \text{ números.}$$

CLAVE "E"



3. Se sabe que las variables A, B, C, D y E representan a números de 5, 6, 9, 8 y 7 cifras respectivamente. El intervalo de valores en que fluctúa $\left(\frac{ABC}{DE}\right)^2$ es:

- A) Entre 8 y 14 cifras B) Entre 8 y 13 cifras
C) Entre 5 y 14 cifras D) Entre 10 y 18 cifras
E) Entre 10 y 18 cifras

RESOLUCIÓN

Se tiene las siguientes desigualdades:

$$10^4 < A < 10^5$$

$$10^5 < B < 10^6$$

$$10^8 < C < 10^9$$

$$10^7 < D < 10^8$$

$$10^8 < E < 10^9$$

De lo anterior se tiene que: $10^{17} = 10^{4+5+8} < ABC < 10^{5+6+9} = 10^{20}$ (i)

Además, se tiene que:

$$10^{13} < DE < 10^{15} \Rightarrow \frac{1}{10^{15}} < \frac{1}{DE} < \frac{1}{10^{13}} \text{(ii)}$$

Multiplicando cada lado de las desigualdades (i) y (ii) se obtiene:

$$10^2 = \frac{10^{17}}{10^{15}} < \frac{ABC}{DE} < \frac{10^{20}}{10^{13}} = 10^7 \Rightarrow 10^4 < \left(\frac{ABC}{DE}\right)^2 < 10^{14}$$

Por tanto la expresión $\left(\frac{ABC}{DE}\right)^2$ tiene un intervalo de valores que fluctúa entre 5 y 14 cifras.

CLAVE “C”



4. En una reunión de amigos del CEPUNT una alumna llevó como pareja a su abuelo y las amigas de ésta maravilladas por el espíritu juvenil del abuelo le preguntaron por su edad y éste respondió: “No soy tan joven para decir que tengo sesenta años ni tan viejo para decir que tengo ochenta años. Cada uno de mis hijos me ha dado tantos nietos como número de hermanos tiene. Mi edad es exactamente el doble del número de hijos y nietos que tengo”. La edad del abuelo de la alumna, en años, es:

A) 62 B) 65 C) 68
D) 72 E) 75

RESOLUCIÓN

Sean:

e : Edad del abuelo de la alumna

h : Número de hijos del abuelo

Cada hijo tiene tantos hijos como hermanos, es decir, $h - 1$

El número de nietos es: $h(h - 1)$

Edad del abuelo fluctúa: $60 < e < 80$

Edad del abuelo: $e = \text{Número de hijos} + \text{Número de nietos}$

$$e = 2[h + h(h - 1)] = 2h^2$$

Luego

$$60 < 2h^2 < 80 \Rightarrow 30 < h^2 < 40 \Rightarrow 5, \dots < h < 6, \dots \Rightarrow h = 6$$

$$\text{Edad del abuelo: } e = 2(6)^2 = 72 \text{ años}$$

CLAVE “D”

5. Manuel tiene jeans de tres colores, azul, plomo y verde, teniendo en total menos de 30 jeans. Si el número de jeans de color azul y plomo aumentara en 6 tendría más de 20 jeans de estos colores. Si duplicara el número de jeans de color azul y comprara 5 más de este color no alcanzaría al número de jeans de color verde pero tendría más de 18 jeans de color azul. El número de jeans de color azul es:

A) 5
B) 6
C) 7
D) 8
E) 9

**RESOLUCIÓN**

Sean:

A : Número de jeans de color azul

P : Número de jeans de color plomo

V : Número de jeans de color verde

De la primera sentencia se tiene que: $A + P + V < 30$ (i)

De la segunda sentencia se tiene que:

$$A + P + 12 < 20 \Rightarrow A + P < 8$$
(ii)

De la tercera sentencia se tiene que:

$$2A + 5 < V$$
(iii) y $2A + 5 > 18 \Rightarrow A > 6.5$

Sumando cada lado de las inecuaciones (i) y (iii) se tiene que:

$$3A + P + V + 5 < 30 + V \Rightarrow 3A + P < 25$$
(iv)

Como $A > 6.5$, es decir A toma valores desde 7, y la inecuación (iv) $3A + P < 25$ entonces $A = 7$.

CLAVE “C”

6. Sean $a_k \in \mathbb{Z}, \forall k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ tal que $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$ entonces el mayor valor de

$$\frac{1}{MCM(a_1; a_2)} + \frac{1}{MCM(a_2; a_3)} + \frac{1}{MCM(a_3; a_4)} + \dots + \frac{1}{MCM(a_{n-1}; a_n)}$$
 es:

A) $\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$

B) $\frac{2^n - 1}{2^n}$

C) $\frac{2^{n-1} - 1}{2^n}$

D) $\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n-1}}$

E) $\frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}$

**RESOLUCIÓN**

Para que la suma dada tome su mayor valor cada sumando debe tomar su menor valor y para que ello suceda cada $MCM(a_k; a_k)$ debe ser el menor.

De lo anterior, para que $MCM(a_1; a_2)$ sea mínimo $a_1 = 1$ y $a_2 = 2a_1 = 2(1) = 2^1$. De manera similar, para que $MCM(a_2; a_3)$ el menor posible $a_3 = 2a_2 = 2(2) = 2^2$. Asimismo, para que el $MCM(a_3; a_4)$ tome su valor mínimo $a_4 = 2a_3 = 2(2^2) = 2^3$.

Por tanto se tiene que el menor valor del $MCM(a_{k-1}; a_k)$ se debe cumplir que $a_k = 2^{k-1}$ siendo $MCM(a_{k-1}; a_k) = MCM(2^{k-2}; 2^{k-1}) = 2^{k-1}$.

$$\frac{1}{MCM(a_1; a_2)} + \frac{1}{MCM(a_2; a_3)} + \dots + \frac{1}{MCM(a_{n-1}; a_n)} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

La última suma es:
$$\frac{\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}}$$

CLAVE “E”

7. Sean $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}^+$ tal que $a^2 b^5 c^3 = k$ siendo $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ y $x_1 = ab^2$, $x_2 = a^3 c^4$, $x_3 = b^{10} c^3$ y $x_4 = a^2 b^3 c^2$ entonces el menor valor de $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ es:

- A) k B) $\frac{k}{2}$ C) k
 D) $4k^{3/4}$ E) $k^{3/4}$

RESOLUCIÓN



Aplicando la propiedad relativa a desigualdades (D8): Media aritmética es mayor o igual que la media geométrica entonces se tiene que:

$$MA(x_1; x_2; x_3; x_4) \geq MG(x_1; x_2; x_3; x_4) \Rightarrow \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} = \sqrt[4]{a^6 b^{15} c^9}$$
$$= \sqrt[4]{(a^2 b^5 c^3)^3} = k^{3/4}$$

Por tanto, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4$ entonces el menor valor de la suma pedida es $4k^{3/4}$.

CLAVE “D”

Ejercicios Propuestos



1. Dos hermanos mellizos al discutir sus edades el primero dice: “Si la edad que tengo le resto *la cuarta parte de mi edad disminuido en 3* a lo más se obtiene 15 años. El segundo respondió: “Pero si a mi edad que tengo le resto *la quinta parte disminuido en 4* se obtiene cuanto menos 16 años. La edad que tienen los mellizos es:
A) 17
B) 18
C) 19
D) 20
E) 21
2. Un muchacho empezó comiendo un cierto número de naranjas. Después compró 5 más, que también las comió, resultando que había comido más de 10 naranjas. Compró 8 naranjas más y al comérselas observó que había comido en total más del triple de naranjas que comió la primera vez. El total de naranjas que comió el muchacho es:
A) 6
B) 16
C) 17
D) 18
E) 19
3. En una práctica de Razonamiento Matemático aplicado en CEPUNT a tres alumnos del aula 21, Willy, Koky y Braulio, resolvieron



correctamente más de 13 ejercicios en total. Si Willy hubiera resuelto correctamente 3 ejercicios más habría tenido mayor número de aciertos que Koky y Braulio juntos. Sin embargo, Willy resolvió correctamente menor cantidad de ejercicios que Koky y los que éste resolvió correctamente no llegaron a 8. La cantidad de ejercicios resueltos correctamente por Koky es:

- A) 4
 - B) 5
 - C) 6
 - D) 7
 - E) 8
4. Sean $a, b, c, d \in R^+$ tal que $a^3bc^2\sqrt{d} = m$ entonces el menor valor de $a^2d + b^3c^7 + a^{10}bcd$ es:
- A) m^2
 - B) $2m^3$
 - C) $3m^{4/3}$
 - D) $4m^5$
 - E) $5m^6$
5. El doble de la edad que tiene Marco más la edad que tiene Ana es menor que 51 años. El triple de la edad de Ana menos la edad de Marco es mayor de 67 años. Si la edad de Ana excede en un año al triple de la edad de Marco entonces la edad de Marco es:
- A) 9
 - B) 11
 - C) 15
 - D) 17
 - E) 19
6. Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in R^+$ entonces el menor valor de $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$ es:



- A) n^2
B) n
C) n^3
D) $\frac{n}{2}$
E) n^n
7. Se tienen tres números enteros y consecutivos. Se sabe que la cuarta parte del menor menos 15 es mayor que 16. Asimismo, la cuarta parte del mayor menos 7 es menor que 25. La suma de las cifras del número mayor es:
- A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11
8. Sea p un número real entre 4 y 6 y q es un número entre 48 y 72. La expresión $\frac{q}{p}$ fluctúa entre:
- A) 32 y 48
B) 8 y 18
C) $3/2$ y $1/2$
D) 6 y 48
E) 4 y 8
9. Juan Carlos va en su moto a 25 km/h recorriendo un camino recto de un número entero de kilómetros. Cuando llevaba recorrido la mitad del camino le faltaba menos de 3 horas con 37 minutos y cuando llevaba recorrido 60 km le faltaba más de 4 horas con 47 minutos. La distancia del camino, en kilómetros, es:
- A) 120



- B) 140
- C) 160
- D) 180
- E) 200

10. Se tiene una pared rectangular cuya base mide $x+18$ metros y su perímetro $100-4x$ metros. Si la altura de la pared mide menos que el doble de la base entonces la suma de los valores enteros que puede tomar x es:

- A) 70
- B) 76
- C) 84
- D) 90
- E) 96

11. Si $abcd = 1$ siendo $a, b, c, d \in R^+$ entonces el menor valor de $a+b+c+d$ es:

- | | | |
|--------|--------|------|
| A) 1 | B) 1.5 | C) 2 |
| D) 2.5 | E) 4 | |

12. Al consultarle a Luis por la edad de su hijo éste respondió: “Hace dos años mi hijo pesaba un kilogramo menos siendo en ese entonces la relación de su peso respecto a su edad de $5/3$ y ahora dicho cociente está entre 1 y $6/5$. La edad del hijo de Luis es:

- | | | |
|------|------|------|
| A) 2 | B) 3 | C) 4 |
| D) 5 | E) 6 | |

13. Si $a, b \in R^+$ entonces el menor valor de $\frac{a^5}{b^3} + b^3 a^{-5}$ es:



- A) 1 B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 3,5

14. Un grupo de padres de familia (papá y mamá de cada escolar) del Colegio “Trujillo Unido” asiste al estadio Mansiche para ver a sus hijos participar del campeonato escolar de atletismo. Se sabe que si compran entradas de S/. 18 les faltará dinero y si compran entradas de S/. 15 les sobrará dinero. El grupo de padres de dicho colegio disponen de S/. 360. El número de personas que conforman el grupo de padres de familia es:

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

15. Si $w \in R^+$ tal que es el recíproco de v entonces la suma de las cifras del máximo valor de $\frac{8192}{w^6 + v^6}$ es:

- A) 19 B) 17 C) 15 D) 13 E) 11
B)

16. Dada las siguientes expresiones:

$$A = 2013 (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2012)$$

$$B = 2015 (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2012)$$

$$C = 2016 (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2011)$$

El mayor valor es:

- A) A B) B C) C
D) B y C E) A y D

17. Se da un número real c mayor que 1 tal que $M = \sqrt{c+1} - \sqrt{c}$ y $N = \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$. De las condiciones anteriores se puede inferir que:

- A) $M > N$
B) $M < N$
C) $M = N$



- D) $M = N$ para todo $c > 10^3$
E) No se puede definir la desigualdad

18. Fiorella compra igual cantidad de polos de dos colores. Al vender la cuarta parte de todos los polos le quedan menos de 118 por vender pero si hubiese vendido la sexta parte de todos los polos le quedaría más de 129 por vender. El número de polos que compró es:

- A) 148
B) 150
C) 154
D) 156
E) 160

19. Paco, auxiliar del Centro Preuniversitario de la Universidad Nacional de Trujillo – CEPUNT, viendo el DNI de uno de los alumnos dice: “Cuando este alumno nació yo tenía más de 28 años pero actualmente éste tiene menos de 18 años. Además, hace 2 años la tercera parte de mi edad era menor que la edad de él. La edad actual de Paco, en años, es:

- A) 46 B) 44 C) 54 D) 47 E) 57

20. El propietario de una tienda paga a sus vendedores S/. 10 por producto vendido más una cantidad fija de S/. 50 000. Otra tienda de la competencia paga S/. 15 por producto vendido más S/. 30 000 fijos. El número mínimo de productos que el vendedor de la competencia debe vender para obtener mayor ganancia que el primero es:

- A) 4000 B) 4001 C) 4002 D) 4003 E) 4004

CLAVES

- | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C | 2. A | 3. D | 4. C | 5. A |
| 6. B | 7. D | 8. B | 9. D | 10. B |
| 11. E | 12. C | 13. B | 14. C | 15. A |
| 16. B | 17. B | 18. D | 19. A | 20. B |



**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario

Casacuberta Vergés, C. (2012) Calculus una y varias variables (4^a edición). España: Reverté.

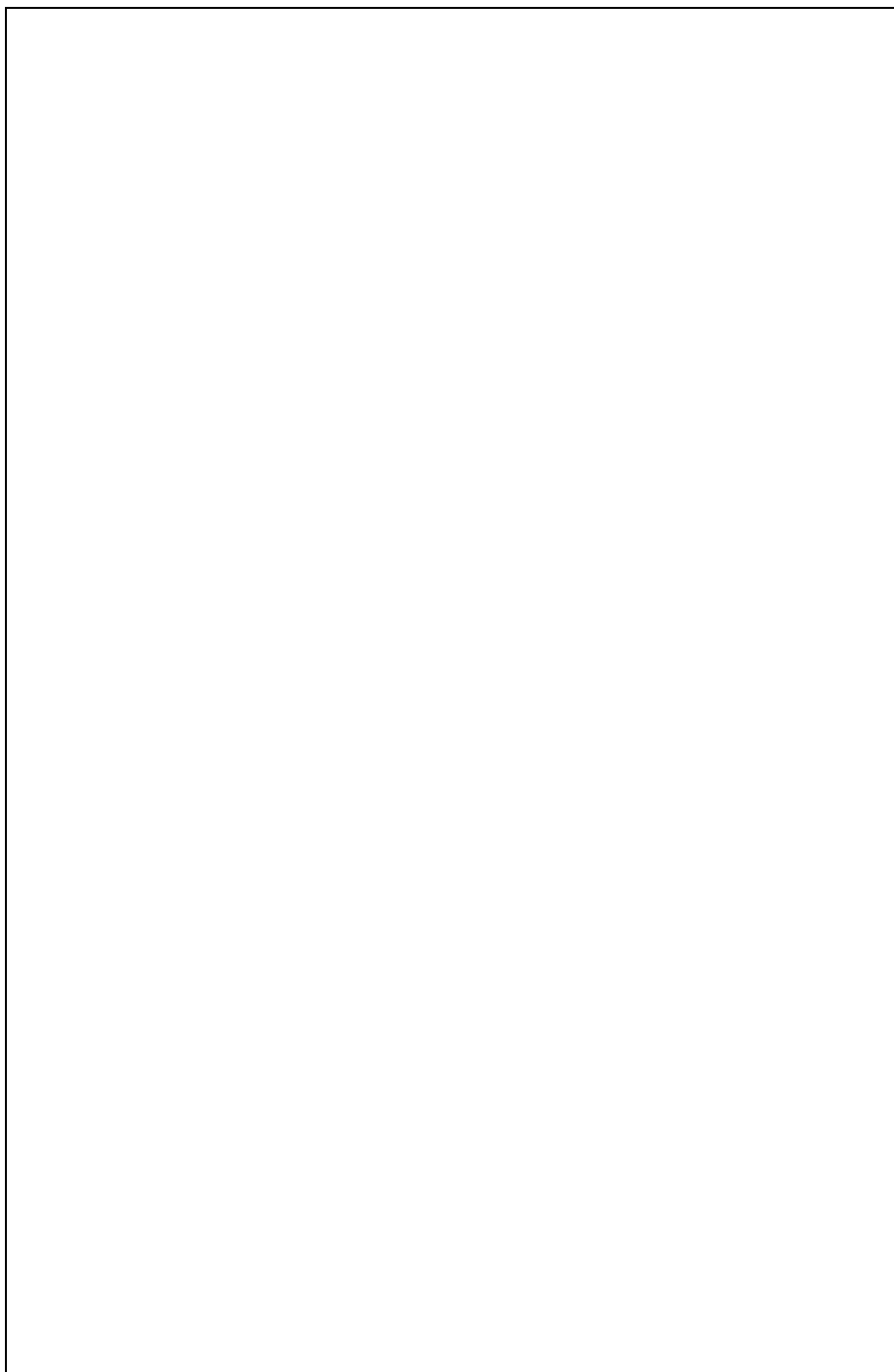
Gaita Iparraguirre, C. y otros (2014) Matemáticas para no Matemáticos (2^a edición). Perú: Estudios Generales PUCP.

Korovkin, P. (1980) Desigualdades (1^a edición). Moscú: Mir.

Llanos Rojas, M. (2010) Algebra: Desigualdades e inecuaciones (3^a edición). Perú: Cuzcano.

Povis Vega, A. (2016) Razonamiento Matemático (3^a edición). Perú: Moshera.

Pozo Montero, F. , Parés Mariné, N. y Vidal Seguí, Y. (2015) Matemáticas para la ingeniería (2^a edición). España: Pearson Educación.



**SEMANA 13****FUNCIONES Y MODELOS
FUNCIONALES****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

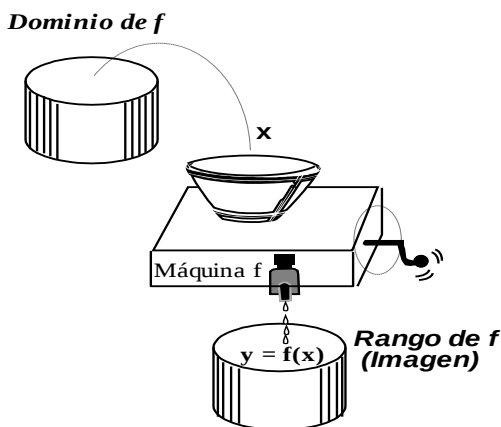
1. Plantear la relación funcional entre dos variables en una situación problemática, caracterizando una función.
2. Construir modelos lineales y cuadráticos a partir de situaciones planteadas.
3. Identifica las variables independiente, dependiente, magnitudes y unidades de una función lineal o cuadrática en una situación problemática.



REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS

Empleamos funciones para analizar numéricamente las relaciones de **causa y efecto**, es decir la correspondencia entre un valor de entrada y otro de salida.

Observa el esquema siguiente:



Una **función** tiene una regla de correspondencia que vincula dos conjuntos de números reales y que asigna a cada elemento del primer conjunto, llamado el **dominio de la función**, exactamente **un elemento** del segundo conjunto. Al conjunto de valores asignados se le llama el **rango de la función**.

Ahora, cuando establezcamos la relación de dependencia (función) entre dos magnitudes será posible representarla como un modelo funcional.

Por ejemplo, la ganancia total (G) inicialmente depende de dos magnitudes: ganancia unitaria (U) y número de productos (P). Entonces se observa que:

$$G_{(u,p)} = U \times P$$

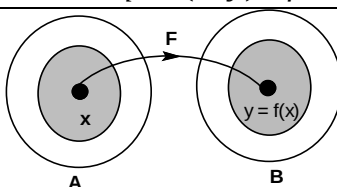
Pero si encontramos alguna correspondencia entre la ganancia unitaria y el número de productos entonces la ganancia total solamente dependerá de una de las magnitudes.



1.- DEFINICIÓN

Dados dos conjuntos no vacíos “A” y “B” y una relación, se define: “f” es una función de A en B sí y solamente sí para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$, tal que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Si: f es una función tal que: $(x; y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$



2. NOTACION DE UNA FUNCION

Una función puede denotar de diferentes formas, pero la más adecuada es la siguiente:

$$f : A \rightarrow B / y = f(x)$$

Donde la ecuación: $y = F(x)$ se denomina **Regla de Correspondencia** entre x e y; además:

A : Conjunto de partida

B : Conjunto de llegada

x : Pre – imagen de y o variable independiente

y : Imagen de x o variable dependiente

2. EVALUACION DE UNA FUNCION

Dada la función $f : A \rightarrow B / y = f(x)$

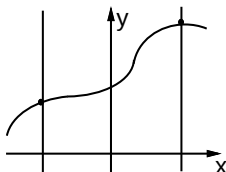
Evaluar la función F significa obtener el valor de “y” mediante su regla de correspondencia, luego de asignarle un cierto valor de “x”. Por ejemplo, para $x = a$, el valor de la función, llamado también **Imagen**, que le corresponde será $F(a)$, con lo cual que el par $(a; F(a)) \in F$.



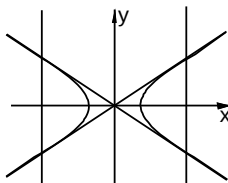
4. RECONOCIMIENTO GRAFICO DE UNA FUNCION

En el plano cartesiano, una cierta gráfica es la representación de una función si y sólo si cualquier recta vertical (paralela al eje y) intersecta a dicha gráfica a lo más en un punto.

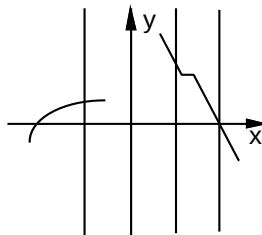
Observa los siguientes gráficos:



Es de una Función



No es de una Función



Es de una Función

IMPORTANTE:

Una función “ f ” queda bien determinada (también se dice: bien definida), si se conocen:

- a) Su regla de correspondencia $f(x)$ (es decir, la ecuación de la función)
- b) Su dominio.

5.- VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL

Se dice que una variable y es **directamente proporcional** a la variable x si: $y = kx$

Donde k es una constante diferente de cero. De manera más general, se dice que la variable y es directamente proporcional a la n -ésima potencia de x ($n > 0$) si $y = kx^n$

La constante k se llama **constante de proporcionalidad**

Ejemplo ilustrativo 1:

El peso del cerebro de una persona es aproximadamente proporcional al peso de su cuerpo, si una persona pesa 150 lb su cerebro pesa alrededor de 4 lb. a) Exprese el número de libras del peso aproximado del cerebro de una persona como una función de



su peso corporal. **b)** Encuentre el peso aproximado del cerebro de una persona cuyo peso corporal es 176 lb.

RESOLUCIÓN

a) Sea $f(x)$ libras de peso aproximado del cerebro de una persona cuyo cuerpo pesa x libras. Entonces:

$$f(x) = kx \quad (1)$$

Debido a que una persona con un peso corporal de 150 lb. tiene un cerebro de aproximadamente 4 lb. De peso, se sustituye en (1) 150 por x y 4 por $f(x)$, obteniéndose:

$$4 = k(150) \Rightarrow k = \frac{2}{75} \text{ Al sustituir } k \text{ en (1) por este valor, se}$$

$$\text{obtiene: } f(x) = \frac{2}{75}x$$

b) Dado que $f(x) = \frac{2}{75}x$ Entonces $f(176) = \frac{2}{75}(176)$

Luego $f(176) = 4,7$ libras.

6.- VARIACIÓN INVERSAMENTE PROPORCIONAL

Se dice que una variable y es **inversamente proporcional** a la variable x si: $y = k/x$

Donde k es una constante diferente de cero. De manera más general, se dice que la variable y es inversamente proporcional a la n -ésima potencia de x ($n > 0$) si $y = k/x^n$

La constante k se llama **constante de proporcionalidad**

Ejemplo ilustrativo 2:

La iluminación de una fuente de luz específica es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de ella. **a)** Exprese el número de luxes(lx) de la iluminación como una función del número de metros a la distancia de la fuente de luz, si la iluminación es 225 lx a una distancia de 5 m. de la fuente. **b)** Encuentre la iluminación de un punto a 15m. de la fuente.

RESOLUCION

a) Sea $f(x)$ la iluminación de la fuente de luz a x metros de ella. Entonces:



$$f(x) = \frac{k}{x^2} \quad (2)$$

Debido a que la iluminación es 225 lx a una distancia de 5m. de la fuente, si se sustituye x por 5 y $f(x)$ por 225 en (2) se obtiene:

$$225 = \frac{k}{5^2} \Rightarrow k = 5625$$
 Al sustituir este valor de k en (2), se

$$\text{tiene: } f(x) = \frac{5625}{x^2}$$

b) A partir de la expresión anterior para $f(x)$, se obtiene

$$f(15) = \frac{5625}{15^2} = 25$$
 La iluminación de la fuente es **25 lx**

7.- VARIACIÓN CONJUNTAMENTE PROPORCIONAL

Se dice que una variable z es **conjuntamente proporcional** a las variables x e y si: $y = k/x$

Donde k es una constante diferente de cero. De manera más general, se dice que la variable z es **conjuntamente proporcional** a la n -ésima potencia de x ($n > 0$) si $z = kx^n y^m$

La constante k se llama **constante de proporcionalidad**

Ejemplo ilustrativo 3:

En un medio limitado donde A es un número óptimo de bacterias tolerable, el índice de crecimiento de éstas es conjuntamente proporcional al número de bacterias presentes y a la diferencia entre A y éste último número. Si se supone que un millón de bacterias es el número óptimo tolerable por el medio, y el índice de crecimiento es de 60 bacterias por minuto cuando 1000 bacterias están presentes. **a)** Exprese el índice de crecimiento bacteriano como una función del número de bacterias presentes. **b)** Determine la velocidad de crecimiento cuando 1000 000 de bacterias están presentes.

RESOLUCION



a) Sea $f(x)$ bacterias por minuto el índice de crecimiento cuando hay x bacterias presentes. Entonces:

$$f(x) = kx(1000\,000 - x) \quad (3)$$

Dado que el índice de crecimiento es 60 bacteria por minuto cuando hay 100 bacterias presentes, se sustituye en (3) x por 1000 y $f(x)$ por 60, y se obtiene:

$$60 = k(1000)(1000\,000 - 1000)$$
$$k = \frac{60}{999\,000\,000} \Rightarrow k = \frac{1}{16\,650\,000}$$

Y se sustituye k en (3), por este valor se obtiene:

$$f(x) = \frac{1}{16\,650\,000} x(1000\,000 - x)$$

b) A partir de la expresión anterior $f(x)$, se tiene:

$$f(100\,000) = \frac{1}{16\,650\,000} (100\,000)(1000\,000 - 100\,000)$$

$$f(x) = 5405$$

El índice de crecimiento es de 5405 bacterias por minuto cuando 100 000 bacterias están presentes.

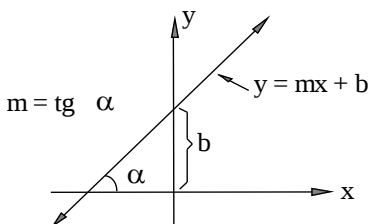
8.- DEFINICION DE FUNCION LINEAL

Una función de la forma $f(x) = mx + b$, se llama **función lineal**. Si $m = 0$, el resultado es $f(x) = b$, se llama **función constante**. Si $m = 1$ y $b = 0$, entonces el resultado es $f(x) = x$, que se llama **función identidad**.

El dominio de cualquier función lineal es todo los números reales. Si $m \neq 0$, entonces el rango es todos los reales. Si $m = 0$, la función es contante y el rango es $\{b\}$

5.1.- Propiedades de la gráfica de $f(x) = mx + b$

La gráfica de una función lineal es una recta con pendiente m e intercepto en b



Suponga que $f(x) = mx + b$ es una función lineal y que

$y = f(x)$. Entonces $y = ax + b$ la cual es una ecuación de la recta con pendiente en a e intercepción en el eje “y” en b . Así **La gráfica de la función lineal es una recta.** Decimos que la función $f(x) = ax + b$ tiene pendiente en a .

Ejemplo ilustrativo 4: Dieta de gallinas

En pruebas de una dieta experimental para gallinas, se determinó que el peso promedio w (en gramos) de una gallina fue, según las estadísticas, una función lineal del número de días d después de que se inició la dieta, donde:

$0 \leq d \leq 50$. Suponer que el pesopromedio de una gallina al inicio de la dieta fue de 40 gramos y 25 días después fue de 675 gramos.

a) Determinar w como una función lineal de d

b) Determinar el peso promedio de una gallina cuando $d = 10$

RESOLUCION

a) Como w es una función lineal de d , su gráfica es una línea recta. Cuando $d = 0$ (al inicio de la dieta), $w = 40$. Por tanto

$(0; 40)$ pertenece a la gráfica. De manera similar $(25; 675)$ pertenece a la gráfica. Si hacemos:

$(d_1, w_1) = (0; 40)$ y $(d_2, w_2) = (25; 675)$, la pendiente de la recta es:

$$m = \frac{w_2 - w_1}{d_2 - d_1} = \frac{675 - 40}{25 - 0} = \frac{635}{25} = \frac{127}{5}$$

Utilizando la forma punto pendiente, tenemos:



$$w - w_1 = m(d - d_1)$$

$$w - 40 = \frac{127}{5}(d - 0)$$

$$w = \frac{127}{5}d + 40$$

w expresada como función de **d**

b) Cuando $d = 10$, entonces : $w = \frac{127}{5}(10) + 40 \Rightarrow w = 294$

Así el peso promedio de cada gallina después de 10 días del inicio de la dieta es de 294 gramos.

9.- FUNCION CUADRÁTICA

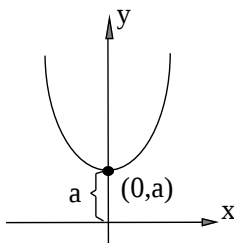
Es una función polinómica de segundo grado, cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = ax^2 + bx + c ; a \neq 0$$

su dominio es : $x \in (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

su rango es : $y \in [c - b^2/4a, +\infty)$

La gráfica de la ecuación cuadrática es una PARABOLA de eje paralelo al eje Y, que puede estar abierta hacia arriba o abajo.



Ejemplo ilustrativo 5: Ingreso máximo

La función de demanda para un producto es:

$$p = 1000 - 2q$$

donde **p** es el precio (en dólares) por unidad cuando **q** unidades son demandadas (por semana) por los consumidores encontrar el nivel de producción que maximizará el ingreso total del productor y determinar ese ingreso.

RESOLUCION



Para maximizar el ingreso debemos determinar la función del ingreso $w = f(q)$, utilizando la relación:

$$\text{Ingreso total} = (\text{precio}) \cdot (\text{cantidad})$$

Tenemos : $r = p \cdot q$

Con la ecuación de la demanda podemos expresar p en términos de q , de modo que r sea estrictamente una función de q

Tenemos:

$$r = p \cdot q \Rightarrow r = (1000 - 2q) \cdot q$$

$$r = 1000q - q^2$$

Observe que r es una función cuadrática de q , con $a = -2$, $b = 1000$ y $c = 0$. Ya que $a < 0$ (parábola que abre hacia abajo) r es máximo en el vértice: $(q; r)$, donde:

$$q = -\frac{b}{2a} = -\frac{1000}{2(-2)} = 250 \text{ reemplazando en } r \text{ tenemos}$$

$r = 125\,000$, es el ingreso máximo del fabricante cuando la producción es de 250 unidades

10.- FUNCION EXPONENCIAL

Ejemplo ilustrativo 6: Crecimiento de bacterias

El número de bacteria presentes en un cultivo después de t minutos está dado por:

$$N(t) = 300 \left(\frac{4}{3} \right)^t$$

- a) Cuántas bacterias están presentes al inicio?
- b) Aproximadamente ¿cuántas bacterias están presentes después de 3 minutos?

RESOLUCION

- a) Se debe determinar $N(t)$ cuando $t = 0$

$$N(0) = 300 \left(\frac{4}{3} \right)^0 = 300(1) = 300$$

Luego 300 bacterias están presentes inicialmente.



b) Tenemos:

$$N(3) = 300 \left(\frac{4}{3} \right)^3 = 300 \left(\frac{64}{27} \right) = \frac{6400}{9} \approx 711$$

Se obtiene que 711 bacterias están presentes luego de 3 minutos, aproximadamente.

Ejercicios Resueltos



- 1.- Determinar una función que exprese el área del rectángulo de base x y perímetro $2a$ ($a > 0$) ; el dominio y rango de la función obtenida es:

RESOLUCION

Designemos x e y a las dimensiones del rectángulo

1° Por geometría sabemos que su área está dada por: $A = x \cdot y$

2° Del perímetro tenemos:

$$2x + 2y = 2a \rightarrow x + y = a$$

$$y = a - x$$

3° Del área tenemos:

$$A(x) = x \cdot (a - x), \quad a > 0$$

4° Especificar el dominio : si $A(x) > 0 \rightarrow x(a - x) > 0$ de donde

$$0 < x < a \quad \text{por lo tanto} \quad \text{Dom}(A) = \langle 0 ; a \rangle$$

5° Rango de la función: $A(x) = ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$

6° Si $0 < x < a \rightarrow -\frac{a}{2} < x - \frac{a}{2} < \frac{a}{2} \Rightarrow 0 < \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 < \frac{a^2}{4}$

7° Multiplicando por (-1) : $-\frac{a^2}{4} < \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 < \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2}{4}$

$$\text{Luego : } 0 < A(x) \leq a^2/4, \quad \text{entonces: } \text{Ran}(A) = \langle 0 ; a^2/4 \rangle$$

- 2.- En una circunferencia de radio $r = 5$, se inscribe un triángulo isósceles.



Expresar el área del triángulo en función de su altura

RESOLUCION

1º Sea $\overline{BH} = x$ la altura del triángulo isósceles ABC y sea

$\overline{AC} = b$ la longitud del lado desigual.

2º El área del triángulo ABC es $S = 1/2 (\overline{AC}) \overline{BH} = \frac{b}{2} x$

3º En el triángulo rectángulo BCD : $\overline{HC}^2 = \overline{BH} \times \overline{HD}$

(La altura es media proporcional entre los segmentos en que divide a la hipotenusa)

4º Entonces: $(b/2)^2 = x.(2r - x)$, de donde $b = 2\sqrt{x(2r - x)}$

5º Luego para $r = 5$ en el paso 2º tenemos:

$$S = x\sqrt{x(10 - x)}$$

3.- Una tienda de artículos domésticos tiene 900 licuadoras en almacén al principio de cada mes; las ventas de licuadoras promedian 25 unidades por día de venta.

a) Hallar un modelo matemático que represente el número de licuadoras en almacén en cualquier día de ventas de cada mes.

b) ¿En qué tiempo se agotaran las licuadoras en almacén?

RESOLUCIÓN

a) Sea y el número de licuadoras en el almacén y x el número de días de venta. Al inicio de cada mes, es decir cuando $x = 0$, tenemos en almacén $y = 900$ licuadoras. Como el número de licuadoras disminuye en almacén a razón de 25 unidades por día de venta, entonces y cambia en $- 25$ unidades cuando x cambia en 1 unidad, es decir la razón de cambio o pendiente es $m = - 25$. Luego la función está dada por la fórmula:

$$y = mx + b = - 25x + 900$$

b) Cuando las licuadoras se agotan en almacén se tiene que:

$$y = 0 \text{ .entonces, } 0 = - 25x + 900 \Leftrightarrow x = 36 \text{ días}$$



- 4.- Sea la función $f = \{(x; y) / x^2 - 4x - 8y - 4 = 0\}$. Determinar el máximo o mínimo de dicha función:

RESOLUCIÓN

La ecuación que define a f , es: $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

Para esta función cuadrática: $a = 1/8$; $b = -1/2$; como $a > 0$, f tienen un valor mínimo, donde:

$$X = h = -b/2a$$

esto es, si:

$$h = -\frac{(-1/2)}{2(1/8)} = 2$$

entonces el valor mínimo es:

$$f(2) = \frac{1}{8}(2)^2 - \frac{1}{2}(2) - \frac{1}{2} = -1$$

- 5.- El departamento de carreteras planea construir un área de picnic para automovilistas al lado de una carretera principal. Será rectangular y tendrá un área de 5000 m² y estará cercada en los tres lados no adyacentes a la carretera. Expresa la cantidad de metros de cerco requeridos, como una función de la longitud del lado no cercado.

RESOLUCION

1º El perímetro del cerco será:

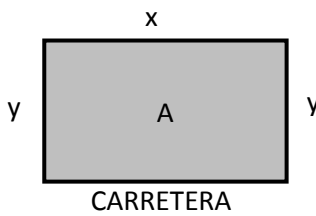
$$P = x + 2y \quad (1)$$

2º Área del terreno:

$$A = x \cdot y = 5000 \text{ m}^2$$

3º Despejamos "y"

$$y = \frac{5000}{x}$$



4º Sustituye en (1) $P(x) = x + 2 \cdot \left(\frac{5000}{x}\right)$

x	80	100	120
F(x)	205	200	203



5º Finalmente la longitud mínima será **100m**.

- 6.- Un fabricante de camisas puede producir una camisa en particular con un costo de \$10 por unidad. Se estima que si el precio de venta de la camisa es x , entonces el número de camisas que se pueden vender por semana es $120 - x$. Determinar cuál debe ser el precio de venta con el objeto de que las utilidades semanales del fabricante alcancen un nivel máximo.

RESOLUCIÓN

1º Ingreso semanal: $I(x) = x (120 - x)$

2º Costo total: $C(x) = (\text{costo por camisa}) \cdot (\text{número de camisas})$

$$C(x) = 10 (120 - x)$$

3º Utilidades: $U(x) = (\text{Ingreso}) - (\text{Costo})$

$$U(x) = x (120 - x) - 10 (120 - x)$$

$$U(x) = -x^2 + 130x - 1200$$

4º Parábola se abre hacia abajo: $x = -b/2a$; $a = -1$, $b = 130$

Luego $x = 130/2 \rightarrow x = 65$ dólares, es el precio con el cual la utilidades obtienen un nivel máximo.

- 7.- Un carpintero diseña y produce carpetas personales y lo vende a 75 soles cada una. Si x carpetas son hechas al día, entonces la cantidad de soles en el costo de producción total es:

$f(x) = -x^2 + 50x + 96$. ¿Cuántas carpetas se deberán producir diariamente para que el carpintero tenga la mayor venta?

RESOLUCION

Si $f(x)$ es el costo de producción diaria, entonces $f(x)$ tendrá un valor máximo, donde $a = -1$, $b = 50$, entonces la cantidad de carpetas producidas será: $x = 50/2(1)$, **$x = 25$**

Luego para obtener mayor venta el carpintero deberá producir 25 carpetas diarias.



- 8.- Halle el precio de equilibrio y las cantidades correspondientes de unidades ofertadas y demandadas si la función de oferta para un determinado artículo es: $S(p) = p^2 + 3p - 70$ y la función de demanda es: $D(p) = 410 - p$

RESOLUCION

El precio de equilibrio se obtiene igualando la oferta con la demanda:

$$p^2 + 3p - 70 = 410 - p$$

$$p^2 + 4p - 480 = 0$$

$$(p - 20)(p + 24) = 0$$

$$p = 20 \text{ ó } p = -24$$

En estos casos se considera el valor positivo de la variable. Luego la demanda para un precio de \$ 20 será:

$$D(20) = 410 - 20 = 390 \text{ artículos.}$$

Por lo tanto el mercado estará en equilibrio si se ofertan y se demandan 390 artículos.

- 9.- Supongamos que el número de pulsaciones por minuto que realiza un principiante de WORD y EXCEL, está dado por la función $f(x) = \frac{600(x+1)}{x+10}$, donde x representa el número de clases recibidas.

¿Cuántas pulsaciones por minuto tecleará al cabo de 15 clases en un determinado tiempo?

RESOLUCION

Sustituimos x por el valor de 15 en la función y luego efectuamos:

$$f(15) = \frac{600(15+1)}{15+10} = 384$$

Es el número de pulsaciones por minutos durante 15 días



- 10.- Un promotor organiza una excursión a la ciudad de Huaraz por 4 días. El precio del viaje es de 300 soles si se reúne 25 o menos personas. Si supera las 25 personas hace una rebaja de 10 soles a cada uno. ¿Cuánto es el ingreso total en soles si viajan 30 personas?

RESOLUCION

1º El ingreso $I : I(x) = (\text{Precio}) \cdot (\text{número de personas})$

$$I(x) = P(x) \cdot x$$

2º Se tiene dos condiciones:

$$I(x) = \begin{cases} 300(x), & \text{si } 0 < x \leq 25 \\ [300 - 10(x - 25)] \cdot x, & \text{si } x > 25 \end{cases}$$

3º reemplazamos la cantidad de personas en la función

$$I(x) = [300 - 10(x - 25)] \cdot x, \text{ si } x > 25$$

$$I(30) = [300 - 10(30 - 25)] \cdot 30 = 7500 \text{ soles}$$

Ejercicios Propuestos



- 1.- Se compra igual cantidad de lapiceros de dos colores. Al venderse la cuarta parte quedan menos de 118 lapiceros por vender y si se vendiera la sexta parte quedarán más de 129 lapiceros por vender. El número de lapiceros que se compararon es:
- A) 160 B) 156 C) 154
D) 150 E) 148
- 2.- A una reunión de graduación asistieron parejas de graduados, también damas y caballeros invitados. Se indica que el número de graduados más el de damas invitadas varía desde 80 hasta 82, el de damas y caballeros invitados desde 81 hasta 83 y el de caballeros invitados más los graduados, desde 82 hasta 84. Considerando que el número



de graduados está entre 32 y 42 y que los caballeros invitados no tenían pareja, el número de asistentes a dicha reunión es:

- A) 240 B) 140 C) 124
D) 122 E) 120

- 3.- Se estudiaron los efectos nutricionales sobre ratones que fueron alimentados con una dieta que contenía un 10% de proteína. La proteína consistía en levadura y harina de maíz. Variando el porcentaje P de levadura en la mezcla de proteína, se estimó que el peso promedio ganado (en gramos) de un ratón en un periodo fue $f(P)$ donde:

$$f(P) = -\frac{1}{50}P^2 + 2P + 20, \quad 0 \leq P \leq 100$$

El máximo peso ganado, en gramos es:

- A) 20 B) 30 C) 40
D) 50 E) 60
- 4.- Un vehículo marchando a 25 Km/h recorre un camino que mide un número entero de kilómetros, cuando llevaba recorrido la mitad del camino le faltaba menos de 3 horas con 31 minutos y cuando llevaba recorrido 60 km. le faltaban más de 4 horas con 35 minutos de marcha. El tiempo que demora en recorrer la séptima parte del camino, en horas, es:
- A) 5 B) 7 C) 1
D) 7/5 E) 4,5
- 5.- A partir de una lámina metálica rectangular y larga de 12 pulgadas de ancho hay que fabricar una canoa doblando hacia arriba dos lados de la misma longitud de modo que sean perpendiculares a la lámina. Las pulgadas que deben doblarse para dar a la canoa la máxima capacidad es:
- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5
- 6.- Un comerciante dispone de una cantidad de dinero para compra un cierto número de objetos iguales entre sí. Pensaba comprarlos al



precio de S/.50 cada uno y le faltaba más de S/.48, después pensó comprarlos al precio de S/.40 cada uno y les sobraban más de S/.152, por último los compró al precio de S/.30 cada uno y le sobraron menos de S/.372. El número de objetos comprados fue:

- A) 18 B) 18 C) 21
D) 12 E) 16

7.- Cada litro de leche “MUUU” contiene al menos dos veces la cantidad de agua que cada litro de la leche “MAAA”. Una mezcla de 3 litros de la leche “MAAA” contiene al menos 5 unidades de agua. El mínimo de unidades de agua que contiene cada litro de la leche “MUUU” es:

- A) 5/2 B) 5/8 C) 5/4
D) 8/5 E) 0

8.- El ingeniero Marcial ha previsto las ganancias de sus empresas en miles de dólares G en el n ésimo día del mes de enero mediante la función: $G(n) = n + 15 + |n + 10|$. Si en “a” días su ganancia es constante y en “b” días su ganancia sobrepasa los 55 mil dólares. Entonces el valor de $a + 2b$ es:

- A) 15 B) 18 C) 21
D) 23 E) 24

9.- Los docentes del CEPUNT recibieron en calidad de donación un terreno en forma triangular de 100 metros de base y 60 metros de altura. Si se tiene en mente hacer una loza deportiva rectangular lo más grande posible (en área), dejando un metro a los lados del triángulo para poder transitar, entonces el área de dicha loza, sería:

- A) 1344 m^2 B) 1350 m^2 C) 1416 m^2
D) 1468 m^2 E) 1500 m^2

10.- La empresa de transporte “TransHuaranchal”, con una tarifa de 20 soles transporta 8000 pasajeros al mes, al considerar un aumento en la tarifa, la compañía determina que perderá 800 pasajeros por cada



5 soles de aumento en el pasaje. La cantidad que se debe incrementar para que el ingreso sea máximo, es:

- A) 5
D) 12,5
- B) 7,5
E) 15
- C) 10

11.- Dos barcos salen del mismo puerto. El primero sale al medio día y navega hacia el este a una velocidad de 10 millas por hora. El segundo sale a las 3:00 pm y viaja al sur a 20 millas por hora. La distancia "d" de un barco al otro en función del tiempo a partir de las 3:00 pm está dado por:

- A) $d = \sqrt{10}\sqrt{5t}$
B) $d = 10\sqrt{5t^2 + 2t + 4}$
C) $d = 10\sqrt{5t^2 + 4t + 4}$
D) $d = 10\sqrt{5t^2 + 6t + 9}$
E) $d = 10\sqrt{5t^2 + 6t}$

12.- De las siguientes afirmaciones:

- I) En la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, si $a < 0$ entonces tiene máximo.
- II) En la función $f(x) = ax^2 + b$, si $a > 0$ entonces la pendiente es negativa.
- III) Si una función f se especifica en forma numérica se puede calcular $f(x)$ para toda x en el dominio de f .
- IV) Toda función expresada de manera gráfica, también se puede especificar numéricamente.

Son verdaderas:

- A) I y II



- B) II y III
- C) I y IV
- D) III y IV
- E) Todas.

13.- Para ingresar como socio al club Huaranchal se paga 600 soles al año, Jorge como presidente no está contento con la respuesta, en el club solo hay un promedio de 10 nuevos socios por mes, decide bajar la cuota en 100 soles menos y observa que los nuevos socios en promedio son 16 por mes. Entonces si la cuotas de ingreso fuera de 350 soles, cuántos socios ingresarían al mes?

- A) 15
- B) 18
- C) 20
- D) 25
- E) 35

14.- La siguiente tabla muestra las ventas semanales de empanadas de la panadería "Milagritos"

Precio por unidad	0,5 y 0,75
(Demanda) Unidades vendidas por semana	400 y 350
(Oferta) Unid. Puestas a la venta por semana	300 y 500

Entonces el precio de equilibrio es:

- A) 0,625
- B) 0,6
- C) 0,875
- D) 0,75
- E) 0,675

15.- Liliana va conduciendo su camioneta de Trujillo a Huaranchal, observando los postes marcadores de kilometraje. Al medir, en



horas, el tiempo transcurrido desde que pasó por los 20 kilómetros, va anotando las siguientes distancias:

Tiempo (horas)	0	0,5	1	1,5	2
Marcador(poste)	20	47	74	101	128

Entonces la distancia recorrida en 6 horas por Liliana, es:

- A) 324 km
- B) 336 km
- C) 340 km
- D) 344 km
- E) 380 km

16.- César ingresa a las 7 am. Y en la primera hora hace 10 ladrillos en una ladrillera donde trabaja, en la tercera hora hace la mayor cantidad de ladrillos que es 12. Si el número de horas transcurridas es cuadrática y el rendimiento cae con respecto al tiempo, entonces la cantidad de ladrillos hechos de 1 a 2pm, es:

- A) 10
- B) 8
- C) 2
- D) 5
- E) 4

17.- Se inscribe un triángulo isósceles en una circunferencia de 10 cm. De diámetro, si al expresar el área del triángulo en función de su altura, entonces la suma de los números enteros del dominio de dicha función, es:

- A) 15
- B) 18
- C) 36
- D) 40
- E) 45

18.- Liliana compra a 250 soles la tonelada de arroz. Sobre la base de su experiencia en el negocio sabe que puede vender 20 toneladas a la



semana con un 60% de ganancia por tonelada y una tonelada adicional a la semana por cada reducción de 3 soles en el precio de venta. Si al expresar la utilidad semanal como una función de “x” toneladas semanalmente vendidas, entonces el precio óptimo es:

- A) 335
- B) 295
- C) 355
- D) 400
- E) 300

19.- Al determinar $f(x)$ lineal para lo cual se cumple:

$$2f(2) + f(4) = 21 \quad \text{y} \quad f(-3) - 3f(1) = -16$$

Entonces $f(3)$ es:

- | | | |
|------|-------|------|
| A) 6 | B) 7 | C) 8 |
| D) 9 | E) 10 | |

20.- Mariana hace artículos a costo unitario de 4 soles y los vende a “x” soles cada uno, podrá vender aproximadamente $(100 - x)$ artículos en una tarde. Para que ella obtenga mayor utilidad en una tarde, cada uno lo debe vender, en:

- A) 38
- B) 42
- C) 52
- D) 60
- E) 6

**CLAVES**

1. B	2. D	3. D	4. C	5. C
6. C	7. B	8. C	9. A	10. E
11. D	12. C	13. D	14. B	15. D
16. E	17. E	18. C	19. C	20. C

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Casacuberta Vergés, C. (2012) Calculus una y varias variables (4ª edición). España: Reverté.

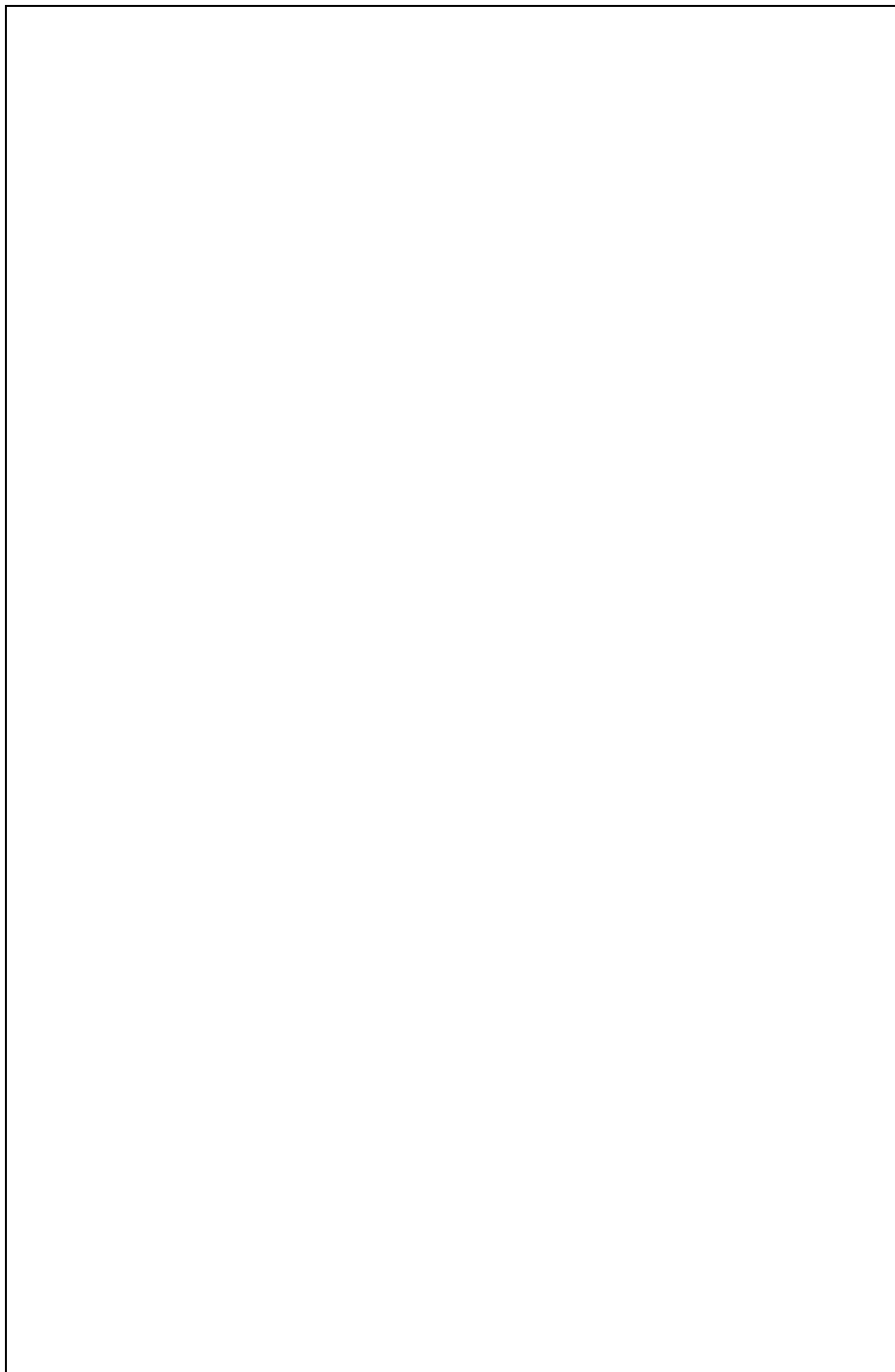
Gaita Iparraguirre, C. y otros (2014) Matemáticas para no Matemáticos (2ª edición). Perú: Estudios Generales PUCP.

Korovkin, P. (1980) Desigualdades (1ª edición). Moscú: Mir.

Llanos Rojas, M. (2010) Algebra: Desigualdades e inecuaciones (3ª edición). Perú: Cuzcano.

Pozo Montero, F. , Parés Mariné, N. y Vidal Seguí, Y. (2015) Matemáticas para la ingeniería (2ª edición). España: Pearson Educación.

Velasquez Michue, C. y Fernandez Salazar, A. (2014) Funciones: Teoría y práctica (2ª edición). Perú: Lumbreras



**SEMANA 14**
SEMANA 15**OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Resolver problemas sobre triángulos, cuadriláteros, polígonos y circunferencia mencionados como texto, que conlleve a la construcción de líneas y gráficos auxiliares.
2. Resuelve problemas que involucre semejanza, congruencia, relaciones métricas, líneas notables y puntos notables de triángulos, cuadriláteros, polígonos y circunferencia con énfasis en la aplicación de trazos auxiliares.

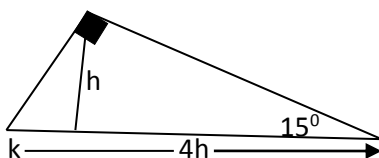


INGENIO GEOMÉTRICO

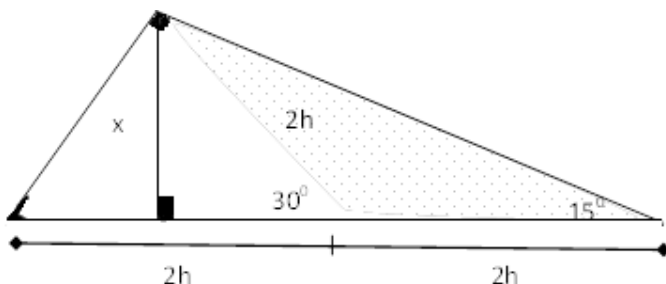
El trazo de líneas auxiliares se usa en geometría para la demostración de teoremas y requiere del ingenio y creatividad del estudiante o investigador para precisar la cantidad de líneas necesarias y construir figuras geométricas notables.

Por ejemplo si queremos demostrar "la medida de la altura trazada sobre la hipotenusa en un triángulo de ángulo agudo 15° mide la cuarta parte de ella" es necesario realizar por lo menos una línea auxiliar, la mediana, sobre la hipotenusa.

Veamos lo que queremos demostrar:



En este caso es suficiente trazar la mediana, así:



De donde se verifica por el triángulo notable de 30° y 60° que $x = h$.

Este tipo de razonamiento se aplicará en cada problema. Por supuesto que esto debes concebirlo como una sugerencia por tanto cabe la posibilidad que generes tu propio procedimiento.

Los procedimientos que desarrollaremos en este capítulo se relacionan con la construcción siempre de figuras geométricas básicas como un triángulo equilátero, un cuadrado o un pentágono regular o tal vez que se observen las condiciones mínimas para considerar a un segmento como mediana, base media o altura, etc.

**1. CONCEPTO DE TRAZO AUXILIAR:**

Concebiremos trazo auxiliar al segmento(s) y/o curva(s) adicional(es) que se debe dibujar en una gráfica propuesta con la finalidad de obtener alguna figura geométrica notable y seguidamente aplicar alguna definición o propiedad conocida.

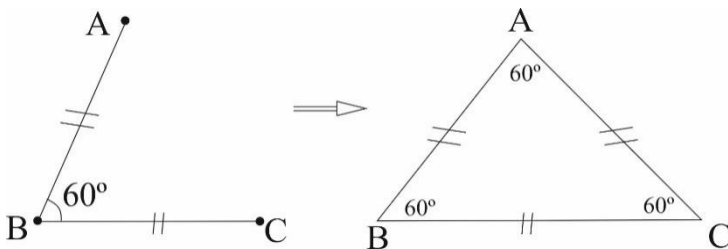
También podemos interpretarlo como el procedimiento de construcción de figuras geométricas notables, ya sea de un triángulo isósceles, un triángulo equilátero, o alguna prolongación de una línea notable, a fin de resolver el problema de un modo más sencillo.

Nota.- Lo anterior es una sugerencia pues el lector puede utilizar sus propios criterios.

2. CRITERIOS UTILIZADOS EN UN TRIÁNGULO:

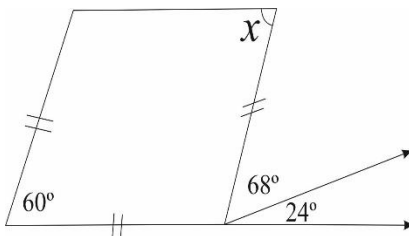
- a) Cuando $\overline{AB} = \overline{BC}$ y $\angle B = 60^\circ$

Entonces se sugiere construir un Δ equilátero

**Ejemplo ilustrativo 1:**

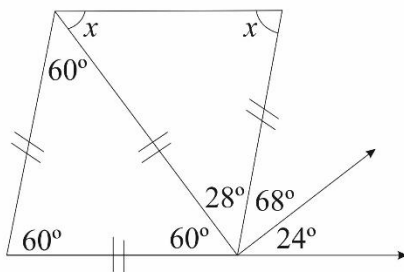
El valor de "x" es:

- A) 72°
- B) 60°
- C) 68°
- D) 76°
- E) 80°



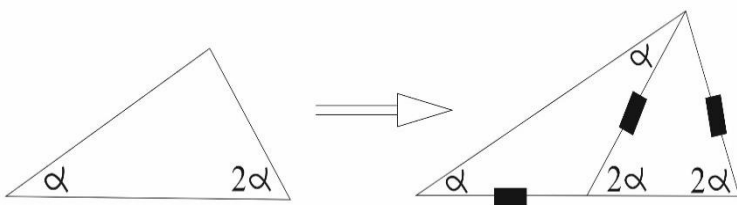
**RESOLUCIÓN**

Construir un triángulo equilátero y luego obtendrás un triángulo isósceles.



Luego: $x + x + 28^\circ = 180$
 $x = 76^\circ$

- b) Si en un Δ un ángulo mide el doble del otro, entonces se debe construir triángulos isósceles.

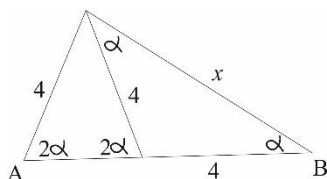
**Ejemplo ilustrativo 2:**

Si en un triángulo el $\angle A = 2\angle B$ y el lado que se opone al $\angle B$ mide 4 u entonces el máximo valor que puede tomar el lado opuesto al $\angle A$ es:

- A) 5
D) 6,5

- B) 5,5
E) 7

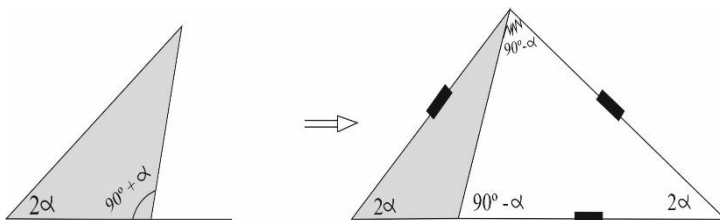
- C) 4,5

**RESOLUCIÓN**

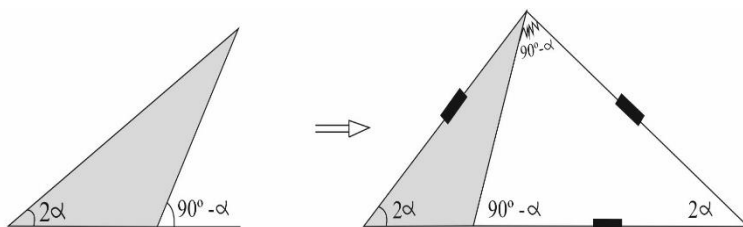
Donde: $x < 4 + 4 \Rightarrow x < 8$

Por lo tanto: $x_{\max} = 7$

- c) Si en un triángulo la medida de un ángulo externo es el complemento de la media de la mitad de un ángulo interno entonces se sugiere construir dos triángulos isósceles.

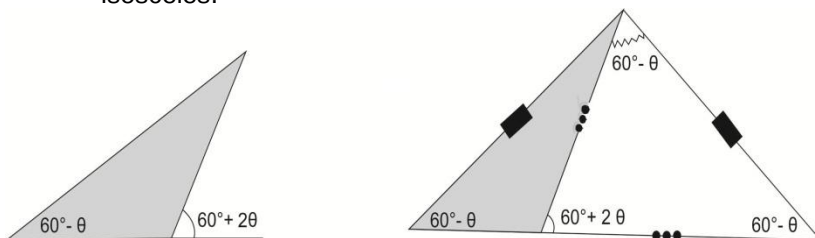


También se puede presentar el siguiente modo:

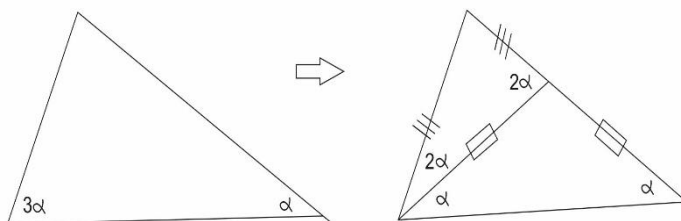




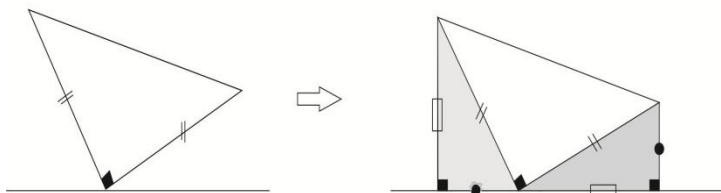
- d) Se presenta la figura siguiente se propone formar dos triángulos isósceles.



- e) Si un ángulo interno de un triángulo mide el triple de otro entonces trazar una ceviana hasta formar dos triángulos isósceles.

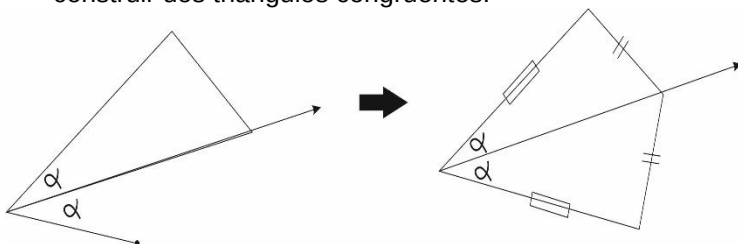


- f) Con el gráfico de un triángulo rectángulo isósceles y una recta que pasa por el ortocentro se pueden formar dos triángulos congruentes.

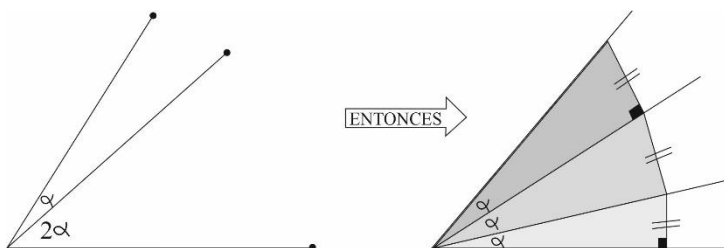




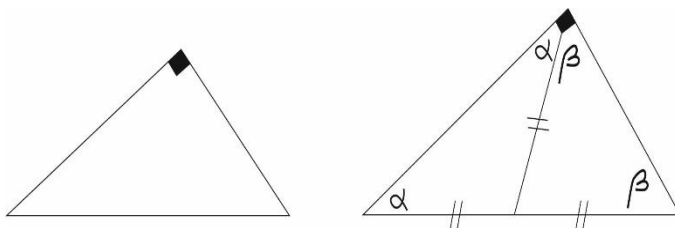
- g) Si en algún problema se presenta una bisectriz. Se sugiere construir dos triángulos congruentes.



- h) Si se presenta la gráfica de un ángulo con la característica mostrada, se puede construir 3 triángulos congruentes.

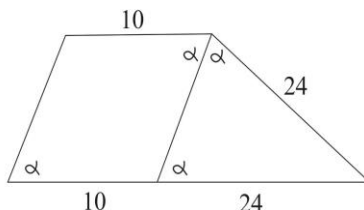
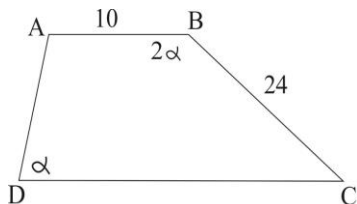


- i) Al graficar un triángulo rectángulo se sugiere trazar la mediana relativa a la hipotenusa pues siempre genera dos triángulos isósceles.



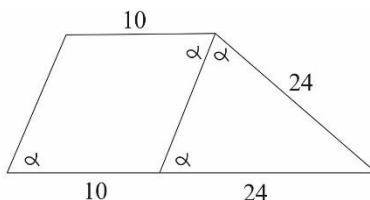
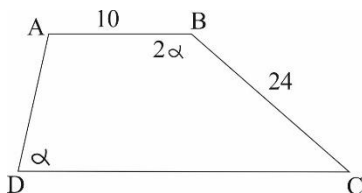
**3) CRITERIOS UTILIZADOS EN UN CUADRILÁTERO:**

a) En un trapecio escaleno se recomienda trazar un segmento paralelo a uno de los lados no paralelos.

**Ejemplo Ilustrativo 3:**

La base menor $\overline{AB}$ de un trapecio ABCD mide 10cm y uno de los lados no paralelos $\overline{BC}$ mide 24 cm. Si el ángulo $\hat{B} = 2\hat{D}$ entonces la mediana el trapecio mide:

- A) 22 cm B) 17 cm C) 19 cm
D) 24 cm E) 20 cm

RESOLUCION

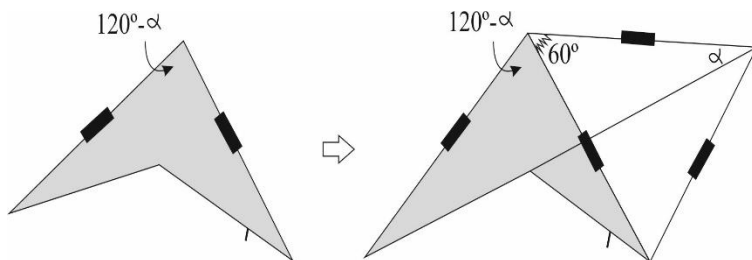
Trazando $\overline{NC} // \overline{AD}$
resulta:

$$MEDIANA = \frac{10 + 34}{2} = 22 \text{ cm.}$$

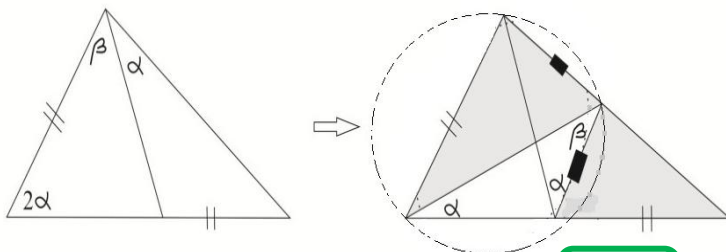
CLAVE "A"



b) El siguiente cuadrilátero cóncavo genera un triángulo equilátero



c) El siguiente triángulo genera un cuadrilátero inscriptible y dos triángulos congruentes.



Ejercicios Resueltos



1.-En un triángulo UNT se traza la ceviana $\overline{NC}$ de modo que $\angle CUN = \angle CNU = 20^\circ$ y $\overline{UN} = \overline{CT}$. El ángulo CNT mide:

A) 75°

B) 90°

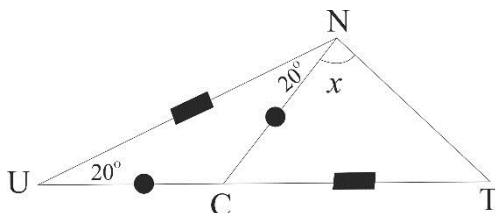
C) 96°

D) 100°

E) 110°

RESOLUCION

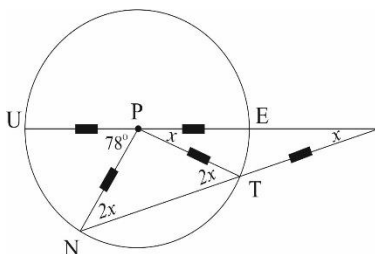
El gráfico inicial es:



Finalmente: $\overline{AT} = \overline{AC} = 6$ **CLAVE "B"**

- 3.- Desde un punto C exterior a una circunferencia de centro P se trazan dos secantes, una diametral que corta en E y U y la otra que corta en T y N. Si $\overline{PU} = \overline{CT}$ y $\angle UPN = 78^\circ$. Entonces la mitad del $\angle PCT$ es:

- A) 12° B) 18° C) 29°
 D) 31° E) 32°

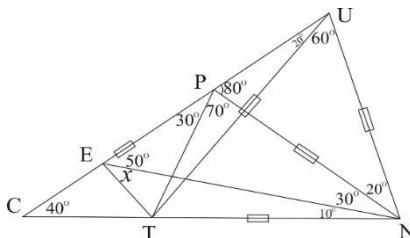
RESOLUCION

Se puede visualizar que: $\overline{UP} = \overline{PE} = \overline{NP}$. Ahora trazando una línea auxiliar $\overline{PT}$ se forman triángulos isósceles: PCT y NPT

Finalmente: $x + 3x = 78 \Rightarrow x = 29$ **CLAVE "C"**

- 4.- En un triángulo CPN isósceles la medida de $\angle CPN = 100^\circ$ se verifica que al trazar las cevianas $\overline{PT} = \overline{NE}$, los ángulos $\angle EPT$ y $\angle ENP$ miden 30° , entonces el $\angle NET$ mide:

- A) 30° B) 15° C) $22,5^\circ$
 D) $37,5^\circ$ E) 45°

RESOLUCION

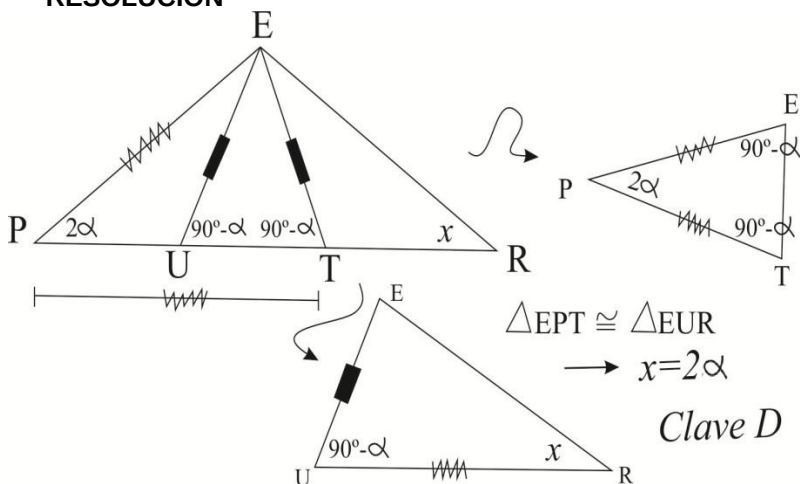
Entonces es isósceles el $\triangle ENU$, es decir: $\overline{UT} = \overline{UE}$ por tanto $\overline{EU} = \overline{UT}$. Finalmente en el $\triangle EUT$:

$$x + 50 = 80 \Rightarrow x = 30$$

**CLAVE "A"**

5.- En un triángulo PER al trazar la ceviana $\overline{EU}$ se verifica que el $\angle EUR$ es el complemento de la mitad del $\angle EPR$ y $\overline{EP} = \overline{UR}$. Si $\angle EPU = 2\alpha < 60^\circ$, entonces la medida del $\angle ERU$ es:

- A) $60^\circ - \alpha$
- B) $\alpha + 15^\circ$
- C) 30°
- D) 2α
- E) $90^\circ - \alpha$

RESOLUCION**CLAVE "D"**

6.- En un triángulo ABC, donde $\angle B = 80^\circ$ y $\overline{AB} = \overline{BC}$, se traza internamente el punto D con las condiciones siguientes:
 $\angle DAB = 30^\circ$ y $\angle DBA = 70^\circ$, la medida del $\angle DCB$ es:

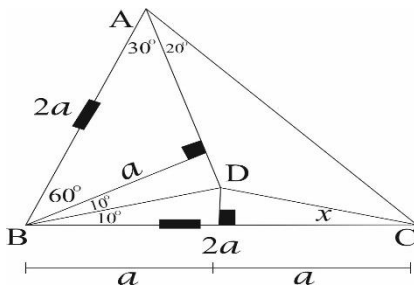
- A) 30°
-) 45°
- C) 60°



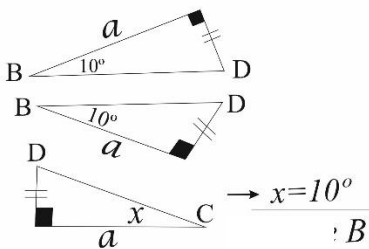
D) 75°

E) 90°

RESOLUCION



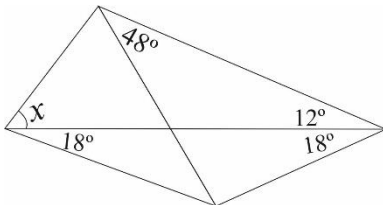
Se puede observar que el ΔABC es isósceles y ahora con el dato de 30° formamos un Δ de 30° y 60° resultando triángulos:



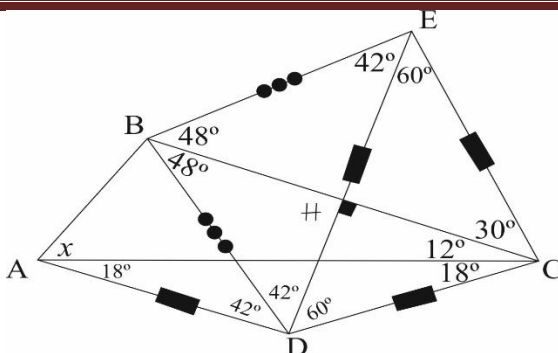
CLAVE "B"

7.- En la figura el valor de "x" es:

- A) 15°
- B) 36°
- C) 30°
- D) 18°
- E) 24°



RESOLUCION



Construimos un ángulo de 30° para formar el triángulo equilátero CDE, Así mismo como: $\overline{BD} \perp \overline{DE}$ entonces se generan triángulos congruentes BHD , BHE y $\triangle ADB \cong \triangle BDE$ luego:

$$x + 18 = 42^\circ \Rightarrow x = 24^\circ$$

CLAVE "E"

Ejercicios Propuestos



- La hipotenusa de un triángulo rectángulo se divide en tres segmentos iguales por los puntos M y N. Si $BM = 3\sqrt{5}$ y $BN = 4\sqrt{5}$, entonces la medida de la hipotenusa  en metros, es:

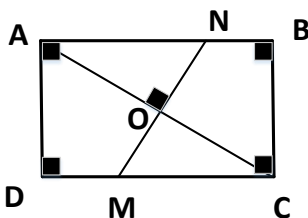
A) 12	B) 13	C) 14
D) 15	E) 16	
- Las bases de un trapezio miden 6 y 20 cm. y la medida de los lados no paralelos 13 y 15 cm., respectivamente, entonces la longitud de la altura, es:

A) 10	B) 12	C) 13
D) 14	E) 15	
- Se inscribe una circunferencia en un triángulo isósceles  , siendo P el punto de tangencia en AB si la distancia de C al lado AB es 16, entonces la distancia desde P al lado AC , es:

A) 16	B) 12	C) 8
D) 6	E) 4	



4. En un trapecio ABCD, BC es la base menor, AB mide 5 cm y los ángulos A y D miden 60° y 30° respectivamente. La distancia, en centímetros, entre los puntos medios de AC y BD es:
- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5
5. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos mide $67^\circ 30'$ y la hipotenusa mide $2\sqrt{2}$, entonces la altura relativa a la hipotenusa, mide:
- A) 4 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) 2 E) 1
6. En un trapecio ABCD recto en A y B, con medida del lado AB 4 cm, el segmento que une los puntos medios de las bases mide 5 cm. La longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales, en centímetros, mide:
- A) 1
B) 1,5
C) 2,5
D) 3
E) 3,5
7. Se tiene un triángulo ABC recto en C, de manera que el ángulo A mide 60° . Si la altura relativa al lado $\overline{AB}$ mide $\sqrt{\frac{9}{8}}$, entonces, la longitud de la mediana que parte de C, es:
- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
8. En el rectángulo ABCD mostrado, "O" es punto medio de la diagonal $\overline{AC}$ y el segmento MN es perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$. Si $\overline{AB}=16\text{cm.}$ y $\overline{BC}=12\text{cm.}$ entonces la longitud de $\overline{MN}$ en centímetros, es:



A) 15

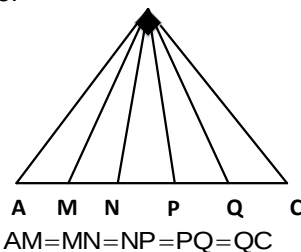
B) 17

C) 16

D) 18

E) 20

9. En la figura siguiente:



Si $\overline{BM}^2 + \overline{BQ}^2 = 68 \text{ cm}^2$, entonces el valor de la hipotenusa en centímetros, es:

A) 9

B) 5

C) 7

D) 10

E) 12

10. En un triángulo MNQ se traza la mediana $\overline{QP}$ y en el triángulo NPQ se traza la mediana $\overline{NR}$ que mide 9 m. Sobre MQ se toma un punto W, de modo que PW sea paralelo a NR, entonces la medida de PW, es:

A) 7 m.

B) 6 m.

C) 5 m.

D) 4 m.

E) 3 m.

11. En un trapecio ABCD, los ángulos adyacentes a la base menor BC miden 110° y 140° , entonces la longitud del lado CD sabiendo que la longitud de la base mayor excede en 10 m. a la longitud de la base menor, es

A) 5 m.

B) 10 m.

C) 15 m.



D) 20 m.

E) 22 m.

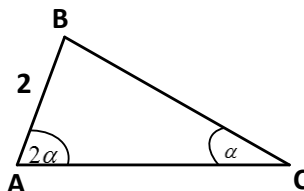
- 12.-Las diagonales de un trapecio miden 3 cm. y 4 cm., respectivamente, y son ortogonales. Si la base mayor mide 3 cm., entonces el área del trapecio, es:

A) 8 cm^2 B) 18 cm^2 C) 12 cm^2 D) 6 cm^2 E) 4 cm^2

13. En un triángulo ABC, $AC = 10\text{m}$, $\angle A = 2\angle B$ y la longitud desde el pie de la altura trazada desde el vértice C hasta el punto B es igual a 15 m, entonces el ángulo C mide:

A) 60° B) 90° C) 120° D) 135° E) 150°

14. En la figura siguiente:



El valor de BC que puede tomar si es entero, es:

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

15. En un triángulo ABC, se traza la altura BH, tal que:

$$\angle ABH = 2\angle HBC \quad \text{y} \quad 3(\overline{AH}) = 7(\overline{HC})$$

Si $AB = 8\text{m}$, entonces el área en m^2 de la región triangular BHC, es:

A) $\frac{17\sqrt{17}}{6}$ B) $\frac{14\sqrt{14}}{6}$ C) $\frac{16\sqrt{17}}{6}$ D) $\frac{17\sqrt{7}}{6}$ E) $\frac{18\sqrt{7}}{7}$

16. En el triángulo ABC se traza la altura AH, siendo $BH = 4$ y $HC = 16$, si

$\text{m}\angle C = \frac{1}{2}\text{m}\angle B$, entonces la longitud de $AB + BC$, es:

A) 60

B) 30

C) 45



D) 32

E) 42

17. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$, Si $\overline{BC} = 18$ y $\angle MBC = 30^\circ$, entonces la medida de la perpendicular $\overline{AH}$ a $\overline{BM}$, es:

A) 5

B) 7

C) 9

D) 11

E) 13

18. En trapecio, sus bases miden 4 y 10 m., si además los lados no paralelos miden 5 y 7 m. respectivamente, entonces la distancia entre los puntos medios de las bases, es:

A) $2\sqrt{2}$ m.B) $2\sqrt{7}$ m.C) $3\sqrt{7}$ m.D) $3\sqrt{2}$ m.E) $4\sqrt{2}$ m.

19. Dado el trapecio ABCD, donde $BC \parallel AD$, Si $\overline{BC} = 4$, $\overline{CD} = 6$, $\overline{AB} = 8$ y $\overline{AD} = 14$ entonces, la altura del trapecio, es:

A) 2,4

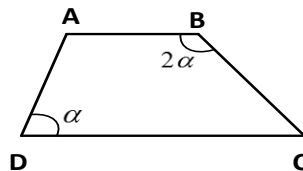
B) 3,6

C) 4,8

D) 5,2

E) 6,4

20. En la figura:



$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $AB = 5$ cm. y $BC = 12$ cm. entonces el valor de la mediana del trapecio, es:

A) 6 cm.

B) 15 cm.

C) 11 cm.

D) 18 cm.

E) 7,5 cm.

**CLAVES**

1. D	2. B	3. C	4. E	5. E
6. C	7. B	8. A	9. D	10. B
11. B	12. D	13. B	14. B	15. E
16. D	17. C	18. B	19. C	20. C

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asociacion Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

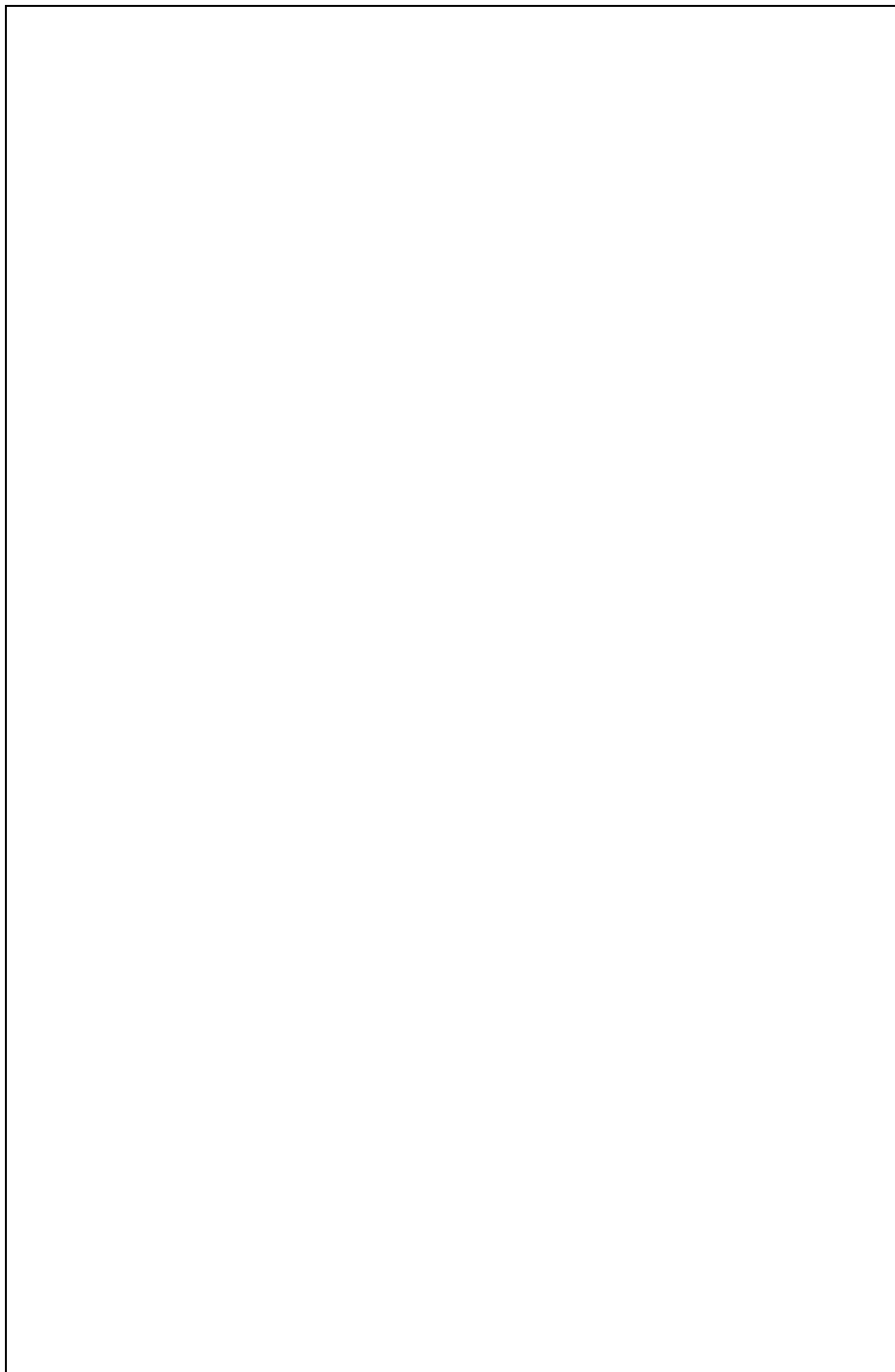
Donaire Peña, M. (2010) Formas y Números: La Geometría en las Olimpiadas Matemáticas (1ª edición). Perú: Fondo Editorial UCH.

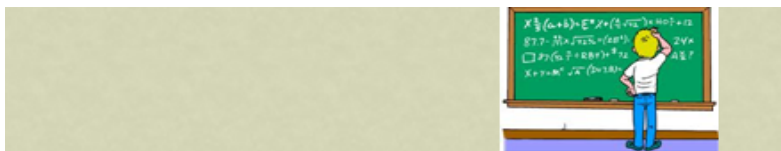
Flores Dionicio, J. y Comeca Cueva, B. (2012) Elementos de geometría plana (1ª edición). Perú: UNMSM-CEPRE

Hernández Gómez, J. y Donaire Moreno, J. (2013) Desafíos de geometría 2 (1ª edición). España: NIVOLA.

Instituto de Ciencias y Humanidades (2012) Geometría: Una visión de la Planimetría (2ª edición). Perú: Lumbreras.

Orihuela Bastidas, J. (2014) Geometría: Teoría – Demostraciones – Trazos auxiliares (2ª edición). Perú: Cuzcano.



**SEMANA 16:****ÁREAS Y PERIMETROS DE REGIONES GEOMÉTRICAS****OBJETIVOS:**

Al término del presente capítulo, los estudiantes desarrollarán sus habilidades en:

1. Resolver situaciones problemáticas sobre áreas de regiones poligonales y circulares empleando las fórmulas básicas respectivas.
2. Resolver situaciones problemáticas sobre perímetro de figuras geométricas empleando las fórmulas básicas. respectivas.



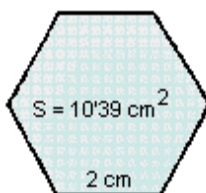
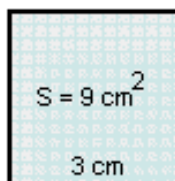
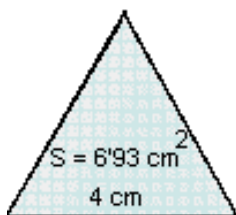
LAS CELDAS DE LAS ABEJAS

Las abejas para almacenar la miel, construyen sus panales con celdas individuales, que han de formar un mosaico homogéneo sin huecos desaprovechados.

Eso lo pueden conseguir con celdas triangulares, cuadradas y hexagonales.

Otra cuestión es qué forma es más rentable para que empleando la misma cantidad de cera, se logre la mayor superficie y capacidad de la celda.

Veamos cuáles son las superficies de un triángulo, un cuadrado, un hexágono y un círculo cuando todos tienen perímetro 12 cm.



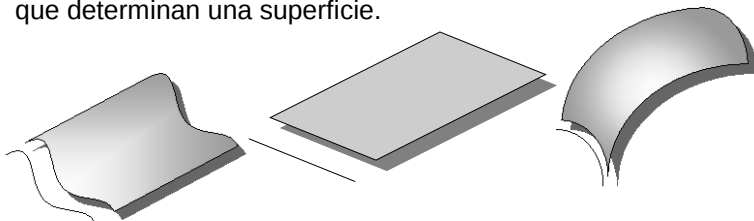
La opción más favorable por mayor superficie a igualdad de perímetro no dejando huecos entre celdas, es el HEXÁGONO y esta es la empleada por las abejas.

Revisaremos algunos conceptos básicos que nos serán útiles en la solución de problemas sobre perímetros y áreas.



1 SUPERFICIE Y ÁREA.

Si desplazamos a una línea, generamos a un conjunto de puntos que determinan una superficie.



Si tal superficie es limitada, entonces nos estamos refiriendo a figuras geométricas y su medida es el área, la cual se representa en unidades cuadradas.

3. FIGURAS GEOMÉTRICAS.

Una figura geométrica es un conjunto de puntos que representan a una superficie tomando una forma determinada. Una figura geométrica tiene: forma, extensión y posición.

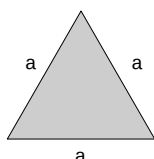
A continuación nos ocuparemos de las figuras geométricas planas más comunes que son los polígonos.

Los *polígonos* son figuras geométricas planas que se obtienen al intersectar por sus extremos tres o más segmentos no colineales pero si coplanares, de modo que al interior de este polígono quede encerrada una porción del plano llamada *región poligonal*.

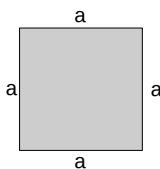
Los polígonos pueden clasificarse en regulares e irregulares.

Polígonos regulares son aquellos que tienen todos sus lados congruentes y sus ángulos interiores también congruentes.

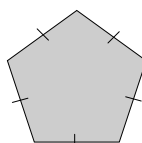
Ejemplos de regiones poligonales regulares:



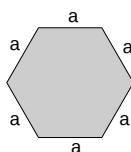
Triángulo equilátero



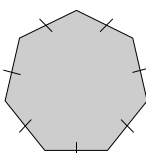
Cuadrado



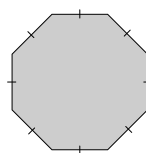
Pentágono



Exágono



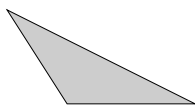
Heptágono



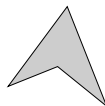
Octógono

Polígonos irregulares son aquellos que no tienen todos sus lados congruentes. Los polígonos irregulares pueden ser cóncavos o convexos.

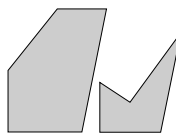
Ejemplos:



Triángulo



Cuadriláteros



Pentágonos

3. PERÍMETROS DE FIGURAS GEOMÉTRICAS

Perímetro:

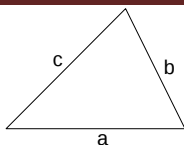
Perímetro es la medida del contorno de una figura geométrica. Se mide en unidades lineales.

En las figuras geométricas poligonales el perímetro se calcula al sumar las medidas de todos sus lados.

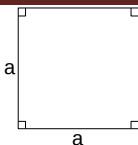
Algunos casos sobre el cálculo de perímetros:

De un triángulo

De un cuadrado

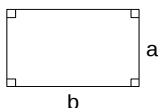


$$P_{\Delta} = a + b + c$$



$$P_{\square} = 4a$$

De un rectángulo



$$P_{\text{rect}} = 2(a + b)$$

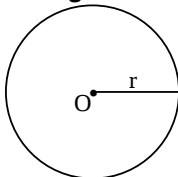
3.1. Definición del Número π

El número π (se lee “pi”) se obtiene al dividir la longitud “L” de una circunferencia, entre su diámetro.

$$\pi = \frac{L}{D} ; \text{ Pero: } D = 2r \Rightarrow \pi = \frac{L}{2r}$$

De esto, se puede deducir que: $L = 2 \cdot \pi \cdot r$, expresión que nos permite calcular la longitud de una circunferencia.

Longitud de la circunferencia



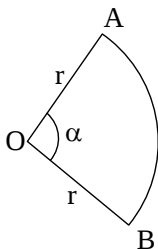
La longitud de la circunferencia es el perímetro de un círculo y se calcula con la fórmula: $L_C = 2\pi r$

donde $\pi = 3,1416$ aprox.

Longitud de arco



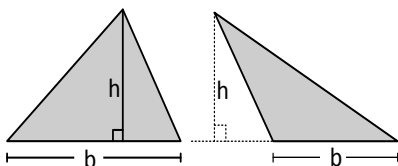
La longitud de un arco lo calculamos así:



$$\widehat{AB} = 2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ}$$

4. ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES

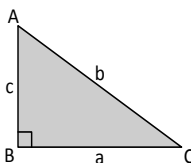
a) Cualquier triángulo



$$S_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$$

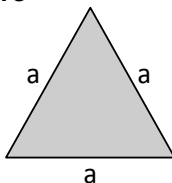
b) Triángulo rectángulo

$$S_{\Delta ABC} = \frac{c \times a}{2}$$



c) Triángulo equilátero

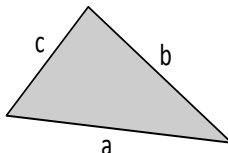
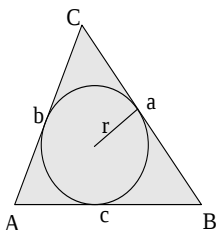
$$A_{\Delta} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



**d) Fórmula de Herón**

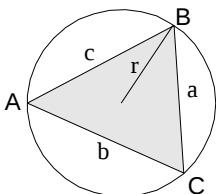
$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde p es el semiperímetro:

**e) Área del triángulo en función del inradio**

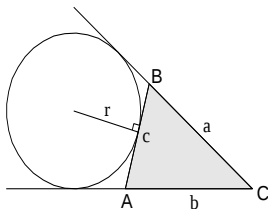
$$S_{\Delta ABC} = pr$$

Donde r es el inradio y p es el semiperímetro:

f) Área del triángulo en función del circunradio

$$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4r}$$

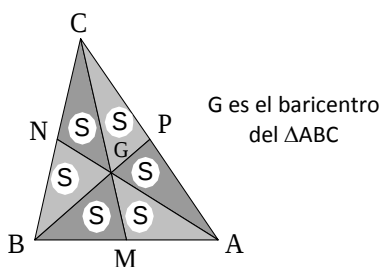
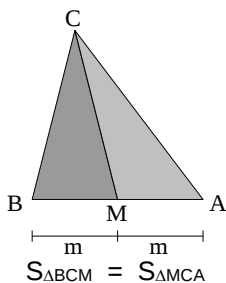
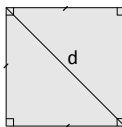
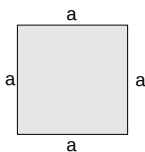
Donde r es el circunradio

g) Área del triángulo en función del exradio relativo a uno de sus lados

$$S_{\Delta ABC} = \frac{(a+b-c)r_c}{2}$$

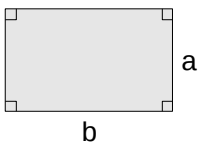
Donde r_c es el exradio

relativo al lado AB con

**h) Comparación de áreas, CM es mediana****5. ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES****a) Área del cuadrado**

$$S_{\square} = a^2$$

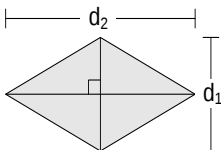
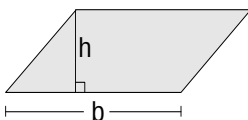
$$S_{\square} = \frac{d^2}{2}$$

b) Área del rectángulo

$$S_{\square} = b \times a$$

**c) Área del rombo**

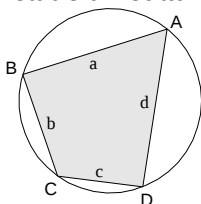
$$S_{\diamond} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

**d) Área del romboide**

$$S_{\parallel} = b \times h$$

e) Área del trapecio

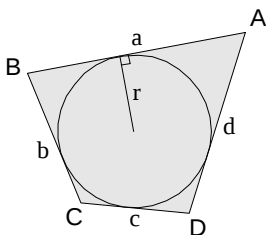
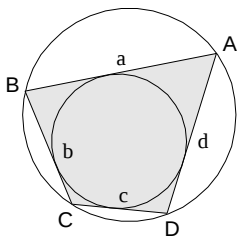
$$S_{\text{trapezoid}} = \frac{h(b_1 + b_2)}{2}$$

f) Área de un cuadrilátero inscriptible

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Donde p es el semiperímetro:

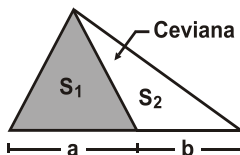
$$p = \frac{a + b + c + d}{2}$$

**g) Área de un cuadrilátero circunscrito****h) Área de un cuadrilátero inscriptible y circunscriptible**

$$S = \sqrt{abcd}$$

6. RELACIÓN ENTRE ÁREAS TRIANGULARES

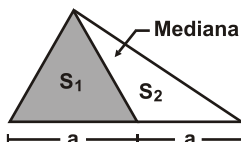
La ceviana de un triángulo determina dos regiones, cuyas áreas son proporcionales a los segmentos determinados en el lado opuesto.



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{b}$$

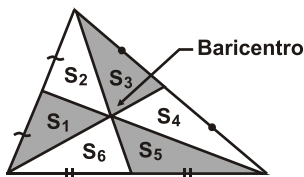


La mediana determina en la región triangular dos regiones equivalentes.



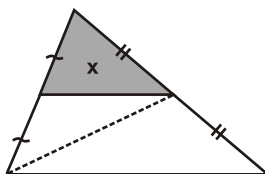
$$S_1 = S_2$$

Las medianas en un triángulo determinan seis regiones equivalentes.



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6$$

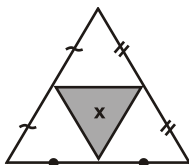
El área de la región triangular determinada por una base media, es un cuarto del área de la región triangular original.





$$x = \frac{S}{4}$$

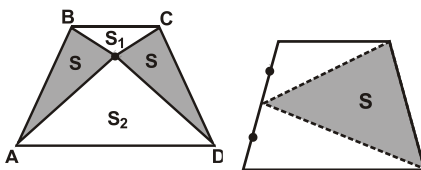
El área de la región correspondiente al triángulo mediano es un cuarto del área del triángulo original.



$$x = \frac{S}{4}$$

NOTA: Se llama triángulo mediano de un triángulo a aquel cuyos vértices son los puntos medios de los lados de dicho triángulo.

7. PROPIEDADES SOBRE ÁREAS DE REGIONES TRAPECIALES

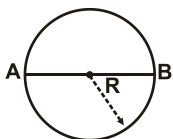


$\triangle ABCD$: Trapecio

$$S^2 = S_1 \times S_2$$

$$S = \frac{\text{Área Total}}{2}$$

$$S_{\triangle ABCD} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$$

**8. ÁREA DEL CÍRCULO**

$$S = \frac{\pi AB^2}{4}$$

$$S = \pi R^2$$

$$L = 2\pi R$$

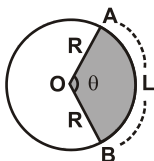
Donde:

S: Área del círculo

L: Longitud de la circunferencia

El área del semicírculo está dado por:

$$S_{\text{semicírculo}} = \frac{\pi \cdot R^2}{2}$$

9. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

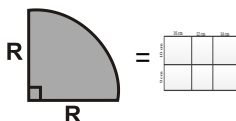
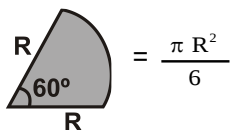
$$S = \pi R^2 \frac{\theta^\circ}{360}$$

$$S = \frac{LR}{2}$$

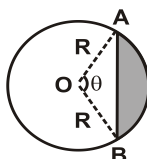
$$L = \pi R \frac{\theta^\circ}{180}$$

L: Longitud del arco AB

Área de algunos sectores circulares



10. ÁREA DEL SEGMENTO CIRCULAR



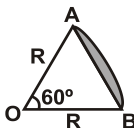
$$SD = S_{\text{sector } AOB} - S_{\text{triangle } AOB}$$

<

$$SD = \frac{\text{Area of Sector}}{\text{Area of Circle}} \times \text{Area of Circle} - \frac{R^2 \text{ Sen} \theta}{2}$$

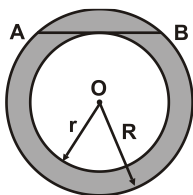
$$SD = \frac{R^2}{360} (\pi \theta - 180 \text{ Sen} \theta)$$

Ejercicio:



$$SD = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$SD = \frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$$

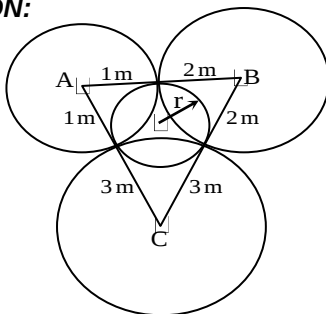
**11. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR**

$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

$$S = \frac{\pi(AB)^2}{4}$$

Ejercicios Resueltos

1. Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos de radios: 1m, 2m y 3m. La longitud del radio de una cuarta circunferencia que pasa por los puntos de tangencia de los tres primeros, mide:
- A) 2m B) 1m C) 5m
D) 3m E) 4m

RESOLUCIÓN:

Los lados del triángulo ABC con referencia a la circunferencia menor son tangentes a ella, por ende:

$$BA = 3\text{ m} ; BC = 5\text{ m} ; AC = 4\text{ m}$$

Los cuales determinan un triángulo rectángulo recto en A



◆ Aplicando teorema de Poncelet

$$3 + 4 = 5 + 2r$$

$$\Rightarrow r = 1m.$$

Rpta.

CLAVE "B"

2. El área de una región triangular ABC es 50, la ceviana $\overline{BD}$ y la mediana $\overline{AM}$ se intersecan en el punto E. El área de la región triangular EBM en metros cuadrados, si $AD = 2 \times DC$, es:

A) 6

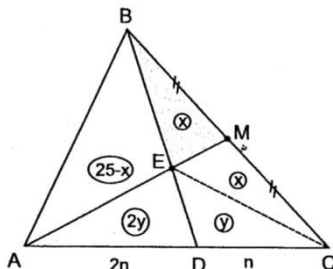
B) 1

C) 5

D) 3

E) 8

RESOLUCIÓN:



$\overline{AM}$ es mediana del $\triangle ABC$:

$$A_{ABM} = \frac{50}{2} = 25$$

$$A_{ABE} = 25 - x$$

$\overline{EM}$ es mediana del $\triangle BEC$:

$$A_{BEM} = A_{MEC} = x$$

Los triángulos AED y DEC tienen una altura común:

$$\frac{A_{AED}}{y} = \frac{2n}{n} \Rightarrow A_{AED} = 2y$$

Los triángulos ABD y BDC tienen una altura común:

$$\frac{A_{ABD}}{A_{DBC}} = \frac{2n}{n} \Rightarrow A_{ABD} = 2A_{DBC}$$

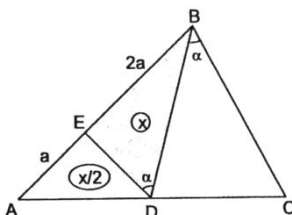
$$25 - x + 2y = 2(2x + y).$$

$$x = 5. \text{ Rpta.}$$

CLAVE "C"



3. El área de la región triangular ABC es 9, se toman los puntos D sobre $\overline{AC}$, E sobre $\overline{AB}$ de modo que $m\angle EDB = m\angle DBC$, $BE = 2AE$. El área de la región triangular BED en metros cuadrados es:
- A) 2 B) 4 C) 9
D) 3 E) 11

RESOLUCIÓN:

Los ángulos congruentes dados son alternos internos, entonces $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Los $\triangle ADE$ y DEB tienen altura común que parte de D:

$$\frac{A_{AED}}{x} = \frac{a}{2a} \Rightarrow A_{AED} = \frac{x}{2} \dots\dots (1)$$

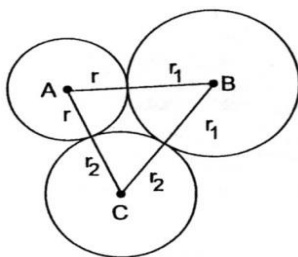
$$\triangle AED \sim \triangle ABC: \frac{A_{AED}}{A_{ABC}} = \frac{AE^2}{AB^2} \dots\dots (2)$$

De (1) y (2):

$$\frac{x/2}{9} = \frac{a^2}{(3a)^2} \Rightarrow x = 2$$

Rpta. CLAVE "A"

4. Se tienen tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos, la suma de las longitudes de los radios es 4 y el producto de los mismos es 9. El área de la región triangular que se forma cuando se une los centros de las circunferencias en unidades cuadradas es:
- A) 2 B) 6 C) 9
D) 13 E) 14

**RESOLUCIÓN:**

$$A_{\Delta} = \sqrt{p(p-r-r_1)(p-r_1-r_2)(p-r-r_2)}$$

Pero: $2p = 2r + 2r_1 + 2r_2$

$$p = r + r_1 + r_2 \begin{cases} p - r - r_1 = r_2 \\ p - r_1 - r_2 = r \\ p - r - r_2 = r_1 \end{cases}$$

Entonces:

$$A_{\Delta} = \sqrt{(r+r_1+r_2) \cdot r \cdot r_1 \cdot r_2} = \sqrt{4 \cdot 9}$$

$$\therefore A_{\Delta} = 6 \Leftarrow \text{Rpta.}$$

CLAVE "B"

5. El triángulo ABC es equilátero, el vértice C es centro. El área de la región sombreada es:

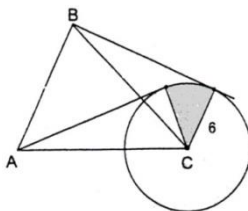
A) 12π

B) 4π

C) 7π

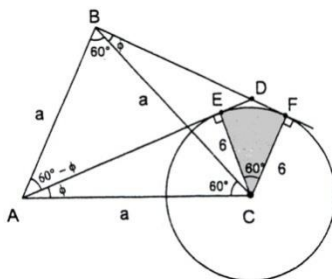
D) 6π

E) 2π





RESOLUCIÓN:



$$\triangle AEC \cong \triangle BFC$$

$$m\angle EAC = m\angle CBF = \phi$$

En el $\triangle ABD$:

$$60^\circ - \phi + 60^\circ + \phi + m\angle ADB = 180^\circ$$

$$m\angle ADB = 60^\circ$$

$$\text{Pero } m\angle ADB = m\angle ECF = 60^\circ$$

por ser ángulos de lados perpendiculares.

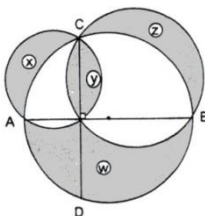
$$A_{\text{pedida}} = \pi 6^2 \frac{60^\circ}{360^\circ}$$

$$\therefore A_{\text{pedida}} = 6\pi \leftarrow \text{Rpta.}$$

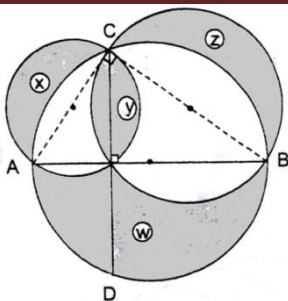
CLAVE "D"

6. Si $\overline{AB}$ es diámetro, entonces la relación entre las áreas x, y, z y w , es:

- A) $w = x + y - z$ B) $w = x - y - z$ C) $w = 2x + y + z$
D) $w = x + 2y - z$ E) $w = x + y + z$



RESOLUCIÓN:



Uniendo C con A y B se forma el $\triangle ACB$ recto en C, $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son diámetros de las dos circunferencias menores.

Usamos la propiedad de las lúnulas de Hipócrates:

$$A_{ABC} = x + z \dots\dots(1)$$

$$A_{ACB} = w - yz \dots\dots(2)$$

Igualando (1) y (2): $x + z = w - y$

$\therefore w = x + y + z$ **Rpta.**

CLAVE "E"

7. Un cuadrado se encuentra inscrito en una circunferencia, tomando como diámetro los cuatro lados del cuadrado se trazan semicircunferencias exteriores. La relación entre las áreas de las regiones del cuadrado y de las cuatro lúnulas que se forman es:

A) 2:1

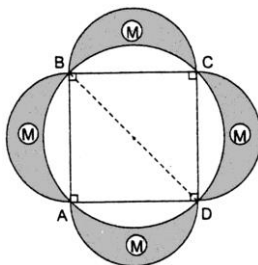
B) 1:1

C) 3:1

D) 8:1

E) 4:1

RESOLUCIÓN:



Las cuatro lúnulas sombreadas son congruentes.

Aplicando la propiedad de las lúnulas de Hipócrates:



$$A_{BCD} = M + N$$

$$A_{BAD} = M + M$$

Sumando:

$$A_{BCD} + A_{BAD} = 4M$$

$$A_{ABCD} = 4M$$

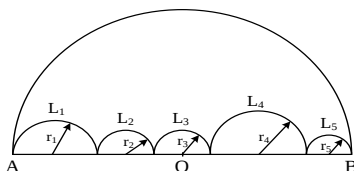
$$\therefore \frac{A_{ABCD}}{4M} = 1 \leftarrow \text{Rpta.}$$

CLAVE "B"

Ejercicios Propuestos

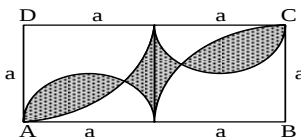


1. En el siguiente gráfico el radio de la semicircunferencia mayor de centro "O" es 10 cm



La suma de las longitudes de las semicircunferencias construidas sobre el diámetro AB es:

- A) 80π cm B) 40π cm C) 20π cm
D) 10π cm E) 5π cm
2. Si ABCD es un rectángulo, el perímetro de la parte sombreada en figura adjunta, es:

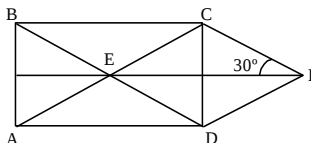


- A) $3\pi a$ B) $2\pi a$ C) πa
D) $4\pi a$ E) $5\pi a$



3. En la figura, la razón entre el perímetro del rectángulo ABCD y el perímetro del rombo ECFD, es:

4.



A) $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$

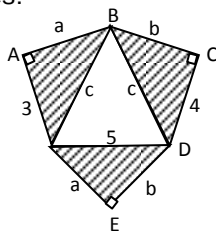
B) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

C) $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

5. Si las medidas en el gráfico están expresados en cm, el perímetro de la región sombreada es:



A) 27 cm

B) 31 cm

C) 36 cm

D) 25 cm

E) 21 cm

6. En un rectángulo ABCD, tomando como centro M el punto medio de AB tal que $MC = AB = 4u$, y tomando como radio a MC se traza el arco CD, entonces el área del segmento circular CD es:

A) $\left(\frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}\right)u^2$

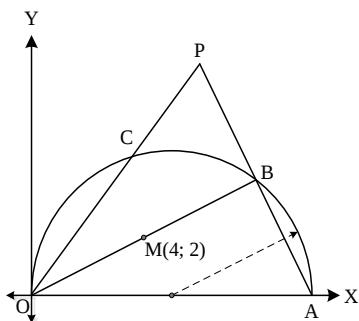
B) $\left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3}\right)u^2$ C) $\left(\frac{8}{3}\pi\right)u^2$

D) $8\sqrt{3}u^2$

E) $\left(\frac{8}{3}\pi - 6\sqrt{3}\right)u^2$



7. En el gráfico adjunto, $m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$. Si $OM = MB$, entonces el área de la región triangular mide:



- A) 40 u^2 B) 45 u^2 C) 60 u^2
D) 70 u^2 E) 80 u^2
8. Una regadora de gras al ser ubicada en un punto fijo en el campo de cultivo del CEPUNT gira horizontalmente 120° paralelamente al suelo. Si al activarla tiene un alcance máximo de 4 metros y un alcance mínimo de 1 m, entonces, el área que será regada es:

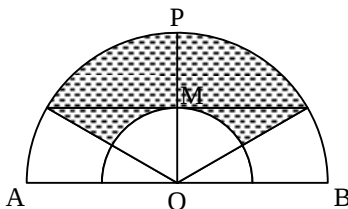
- A) $5\pi \text{ m}^2$ B) $\frac{10\pi}{3} \text{ m}^2$ C) $\frac{5\pi}{2} \text{ m}^2$
D) $\frac{5\pi}{4} \text{ m}^2$ E) $10\pi \text{ m}^2$
9. En un romboide $ABCD$ se traza la altura $\overline{BH}$ y se ubica el punto medio M de $\overline{CD}$. Si $m\angle BAH = 45^\circ$, $m\angle MHD = 30^\circ$ y $AH = 4u$, entonces, el área de la región triangular BHM es:

- A) $4\sqrt{2} \text{ u}^2$ B) $4\sqrt{3} \text{ u}^2$ C) $6\sqrt{2} \text{ u}^2$
D) $6\sqrt{3} \text{ u}^2$ E) 8 u^2



10. En un triángulo ABC de área 150 m^2 , se traza la mediana CM (M en $\overline{AB}$), luego la ceviana AN (N en $\overline{AC}$) la cual corta a CM en P. Si NC es la quinta parte de AC, el área del triángulo APC es:
- A) 5 m^2 B) 20 m^2 C) 25 m^2
D) 30 m^2 E) 50 m^2
11. Dos medianas de un triángulo miden 12 y 15 u y se cortan perpendicularmente. El área de dicho triángulo es:
- A) 60 u^2 B) 72 u^2 C) 90 u^2
D) 120 u^2 E) 180 u^2
12. Si las bases de un trapecio miden 8 y 14 m y su altura es 6 m, entonces el área en m^2 del triángulo que tiene como vértices a los puntos medios de las diagonales y el punto de intersección de la prolongación de los lados no paralelos es:
- A) 16,5 B) 11 C) 28
D) 33 E) 18
13. En un cuadrado ABCD de 6 cm de lado. Si M y N son puntos medios de los lados BC y CD respectivamente. Si al trazarse BN y DM se intersectan en el punto P, entonces el área del cuadrilátero ABPD mide:
- A) 22 cm^2 B) 23 cm^2 C) 24 cm^2
D) 25 cm^2 E) 26 cm^2
14. En la figura. Si O es centro de las dos semicircunferencias y $\overline{OM} = \overline{MP} = 2 \text{ cm}$, entonces el área de la región sombreada, es:

- A) $4 \pi \text{ u}^2$
B) $5 \pi \text{ u}^2$
C) $6 \pi \text{ u}^2$
D) $7 \pi \text{ u}^2$
E) $9 \pi \text{ u}^2$





15. Si las raíces de la ecuación:

$x^3 - 9x^2 + 20x - nx^2 + 9xn = 20n$, son las medidas de las longitudes de los lados de un triángulo, entonces su área, con “n” tomando su máximo valor es:

A) $\frac{3}{4}\sqrt{119}$

B) $\frac{4}{3}\sqrt{117}$

C) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

D) $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

E) $\frac{3}{2}\sqrt{23}$

16. Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en A. Si $\overline{AC} = 28\text{cm}$ y $m\angle BCA = 74^\circ$. Entonces el área del círculo inscrito en dicho triángulo mide:

A) $54\pi\text{cm}^2$

B) $81\pi\text{cm}^2$

C) $144\pi\text{cm}^2$

D) $400\pi\text{cm}^2$

E) $441\pi\text{cm}^2$

17. En un triángulo isósceles la base mide 15 cm y la altura relativa a uno de los lados iguales mide 12 cm. El área del triángulo es:

A) 100cm^2

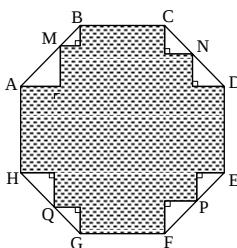
B) 85cm^2

C) 75cm^2

D) 50cm^2

E) 65cm^2

18. Si el perímetro del octágono regular es P entonces el perímetro de la parte sombreada es:



A) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}p$

B) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}p$

C) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}p$

D) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}p$

E) $p\frac{1-\sqrt{3}}{2}$



19. Si se muestra sectores rectangulares entonces la parte sombreada mide:

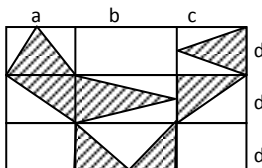
A) $d(a+b+c)$

B) $\frac{2d}{3}(a+b+c)$

C) $d(a+2b+c)$

D) $\frac{3d}{4}(a+b+c)$

E) $3(a+b+c)$



20. Los lados de un triángulo ABC miden a , b , c , su altura $\overline{BH}$ mide $16u$, si se cumple que $a+c=3b$, entonces el inradio de dicho triángulo mide:

A) $3u$

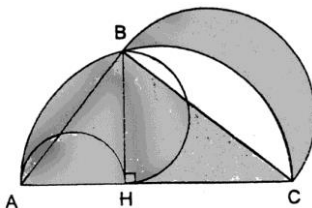
B) $4u$

C) $12u$

D) $6u$

E) $5u$

21. El área de la región del triángulo mixtilíneo ABC es 40, el área de la región de la lúnula sombreada es 10. Hallar la suma de las áreas de los semicírculos de diámetros $\overline{AH}$ y $\overline{BH}$.



A) 30

B) 40

C) 12

D) 30

E) 50

**CLAVES**

1. D	2. B	3. B	4. C	5. B
6. A	7. S	8. B	9. C	10. D
11. A	12. C	13. A	14. A	15. C
16. C	17. A	18. A	19. B	20. A

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Asociación Fondo de Investigadores y editores (2015) Solucionario Razonamiento Matemático, propedéutica para las ciencias (3ª edición). Perú: Lumbreras.

Donaire Peña, M. (2010) Formas y Números: La Geometría en las Olimpiadas Matemáticas (1ª edición). Perú: Fondo Editorial UCH.

Flores Dionicio, J. y Comeca Cueva, B. (2012) Elementos de geometría plana (1ª edición). Perú: UNMSM-CEPRE

Hernández Gómez, J. y Donaire Moreno, J. (2013) Desafíos de geometría 2 (1ª edición). España: NIVOLA.

Instituto de Ciencias y Humanidades (2012) Geometría: Una visión de la Planimetría (2ª edición). Perú: Lumbreras.

Orihuela Bastidas, J. (2014) Geometría: Teoría – Demostraciones – Trazos auxiliares (2ª edición). Perú: Cuzcano.

